बीजगणित की विकास यात्राः 16

गाल्वा के पूर्वज : आयलर

प्रो. महेश दुबे

आधुनिक बीजगणित का युग इवारिस गाल्वा (1811-1832) से प्रारंभ होता है। अपने कार्यों से उन्होंने एक नए बीजगणित की आधारशिला रखी। गाल्वा ने ग्रुप और फील्ड की संकल्पनाओं के साथ पूरे परिदृश्य को बदल दिया। गाल्वा के पूर्वजों में उल्लेखनीय नामआयलर, लाग्रांज, गाउस, कोशी और आबेल के हैं।

यद्यपि 18वीं शताब्दी तक बीजगणितसमीकरणों के माध्यम से प्रश्नों के समाधान का ही विज्ञान थापरंतु उसके स्वरूप में क्रमशः परिवर्तन आ रहा था। अब अरिमेय और सम्मिश्र संख्याएं स्वीकार्य थीं। समीकरणों के गुणधर्मों का अध्ययन भी बीजगणित के दायरे में आता जा रहा था। बीजगणितीय हलों के साथ समीकरणों के संख्यात्मक हलों को प्राप्त करने के प्रयास किए जा रहे थे और सम्मिश्र संख्याओं के प्रति गणितज्ञों की जिज्ञासा बढ़ रही थी। बीजगणित का मूलभूत प्रमेय अभी खोजा जाना था।

16वीं शताब्दी के बाद से ही 4से अधिक घात की समीकरणों को हल करने की प्रविधियां खोजी जा रही थीं। तीन देशों में कार्यरत तीन गणितज्ञों नेसमीकरणों को हल करने की विस्तृत विश्लेषणात्मक व्याख्या अपने कार्यों में प्रस्तुत की। ये गणितज्ञ थेलाग्रांज (Lagrange) वेन्दरमान्दे (Vandermonde) और एडवर्ड वेरिंग (Edward Waring)। लाग्रांज उस समय बर्लिन अकादमी में और वेन्दरमान्दे पेरिस अकादमी में कार्यरत थे। वेरिंग केम्ब्रिज विश्वविद्यालय में लुकेसियन पीठ पर थे। इन तीनों के कार्य अपने पूर्ववर्ती गणितज्ञों से भिन्न थे और यही इन तीनों में साम्य था। तीनों को यह भी मालूम था कि उनके पूर्ववर्ती गणितज्ञ असफल क्यों थे।

लाग्रांज ने अपना कार्य Reflexions Susla Resolution algebsigve des equations. 1770-70 में प्रकाशित किया। वेन्दरमान्दे का कार्य पेरिस अकादमी से Memoire Susla Resolution des equation शीर्षक से 1774 में प्रकाशित हुआ। वेरिंग ने 1762 में प्रकाशित अपनी पुस्तक को परिमार्जित कर Meditationes algebsaicae शीर्षक से 1770 में प्रकाशित किया।

यद्यपि आयलर ने प्रत्यक्ष रूप से बीजगणित में कोई अधिक कार्य नहीं किया, पर गणितीय विश्लेषण में किए गए उनके महत्त्वपूर्ण कार्यों का व्यापक प्रभाव गणित की सभी विधाओं पर पड़ा। उन्होंने बीजगणित पर एक पुस्तक लिखी थी जो अत्यंत लोकप्रिय हुई।

लियोनार्ड आयलर (1707-83) की गणना विश्व के सार्वकालिक महान् गणितज्ञों में की जाती है। गणित के इतिहास में 18वीं शताब्दी को प्रायः 'आयलर का युग' के नाम से जाना जाता है। उनका संपूर्ण जीवन गणित को समर्पित था। उन्होंनेगणित, यांत्रिकी, खगोल और भौतिकी में जितना अनुसंधान कार्य और लेखन किया, उतना संभवतया आज तक संसार के किसी अन्य गणितज्ञ ने नहीं किया। उनका संपूर्ण कार्य 72 वृहत खंडों में प्रकाशित हुआ है। वे अपनी विलक्षण स्मरण शक्ति, ऊर्जावान एकाग्रता और अपनी गणितीय निष्ठा के लिए विशेष रूप से जाने जाते हैं। उन्हें होमर और वर्जिल के काव्य पूरे के पूरे कंठस्थ थे। शोरगुल या भीड़-भाड़ से उनकी एकाग्रता बिल्कुल अप्रभावित रहती थी। 'घुटनों पर खेलते हुए बच्चे और पीठ पर बैठी बिल्ली' जैसी नितांत पारिवारिक स्थितियों में उन्होंने अपना युगान्तकारी कार्य किया। गणना करने की उनकी अद्‌भुत क्षमता पर टिप्पणी करते हुए, फ्रांकवा अरागो ने लिखा है : *जितनी सरलता से मनुष्य सांस लेता है और बाज अपने को आकाश में स्थिर रखता है, उतनी ही सहजता से आयलर गणना करते थे।*

❑ आयलर के संपूर्ण जीवन को चार भागों में विभाजित किया जा सकता है

प्रारंभिक वर्ष 1707-27
पीटर्सबर्ग के 14 वर्ष1727-41
बर्लिन में 25 वर्ष 1741-66
पुनः पीटर्सबर्ग में 1766-83

सौभाग्य से उनके जीवन के प्रारंभिक वर्षो का विवरण, स्वयं उन्हीं के शब्दों में उपलब्ध है। जिसके अनुसार उनका जन्म स्विटजरलैंड के बासेल शहर में 15 अप्रैल, 1707 को हुआ था। उनके पिता का नाम पॉलस आयलर (1670-1745) और मां का नाम माग्रेथ ब्रकर (1677-1761) था। उनके पूर्वजों का कंघी बनाने का व्यवसाय था। पॉलस आयलर ने बासेल विश्वविद्यालय से दर्शन और नीतिशास्त्र की शिक्षा प्राप्त की थी। यहीं उन्होंने जेकब बर्नाली से गणित का ज्ञान भी प्राप्त

* Professar Mahesh Dube, 1102, Sai–Ansh, Plot No. 7, Sector–11, Opposite Juinagas Failway Station, SANPADA., Navi Mumbai–400705; Email : profmdube@yahoo.co.uk

किया। वे केल्विन संप्रदाय के पुरोहित थे और अनुयायी श्रद्धालुओं में आदर के साथ देखे जाते थे। उनकी चार संतानों में लियोनार्ड सबसे बड़े थे। परिवार की धार्मिक आस्थाओं से लियोनार्ड जीवन पर्यंत जुड़े रहे।

आयलर ने अपने पिता से प्रारंभिक शिक्षा प्राप्त की, जिन्होंने उन्हें गणित के मूलभूत सिद्धांतों से भी परिचित कराया। 1720 में उन्होंने बासेल विश्वविद्यालय में प्रवेश लिया और दर्शनशास्त्र में उपाधि प्राप्त की। इसके साथ-साथ वे योहान बर्नाली से गणित की शिक्षा लेते रहे। यद्यपि उनके पिता की इच्छा थी कि वेग्रीक और हिब्रू भाषाओं के साथ नीतिशास्त्र का अध्ययन करें पर तरुण आयलर ने अपना सारा जीवन गणित को समर्पित करने का निर्णय लिया।

18वीं शताब्दी में यूरोप में ज्ञान-विज्ञान के प्रचार-प्रसार और शोध कार्यों को प्रोत्साहित करने में दो अकादमियों की भूमिका महत्त्वपूर्ण थी। दोनों ही संस्थानों की स्थापना लाइबनिट्ज (1646-1716) के प्रयासों से संभव हुई। संयोग से आयलर भी दोनों ही से संबद्ध रहे। प्रशिया के सम्राट फ्रेडरिक प्रथम ने बर्लिन में अकादमी की स्थापना की, जिसने 1711 से कार्य करना प्रारंभ किया। 1724 में रूस के सम्राट-पीटर ने सेंट पीटर्सबर्ग में अकादमी की स्थापना की।

पीटर्सबर्ग की अकादमी में निकोलस बर्नाली (द्वितीय) और डेनियल बर्नाली (प्रथम) की नियुक्ति ने आयलर के वहां पहुंचने के मार्ग को प्रशस्त किया। आयलर को पीटर्सबर्ग बुलाने में क्रिश्चियन गोल्डबाख (1690-1764) नामक राजनयिक और गणितज्ञ का भी योगदान था। कोनिग्सबर्ग (जर्मनी) में जन्मे गोल्डबाख कानून के स्नातक थे। 1725 में उन्हें पीटर्सबर्ग की अकादमी का सचिव बनाया गया। आयलर के साथ उनका पत्र-व्यवहार जीवन-पर्यंत रहा। लगभग 200 पत्रों का यह पत्र-संग्रह गणित के इतिहास की एक बहुमूल्य धरोहर है। इन पत्रों से गोल्डबाख की गणितीय प्रतिभा का भी परिचय मिलता है। 7 जून 1742 के अपने एक पत्र में उन्होंने आयलर को लिखा

'प्रत्येक सम-संख्या दो अभाज्य संख्याओं का योग है।'

2=1+1   8=3+5   16=3+13

4=2+2   10=3+7   52=5+47

6=3+3   12=5+7

यह उनका अनुमान था। यद्यपि बड़ी-से-बड़ी सम-संख्याओं के लिए गोल्डबाख के अनुमान की सत्यता प्रमाणित की जा चुकी हैपरंतु इसे सिद्ध किए जाने की अथवा प्रत्युदाहरण की अभी भी प्रतीक्षा ही की जा रही है। इस अनुमान को कथानक का आधार बनाते हुए एपोस्टोलोन डोक्सीएडिस Aposotolos Doxiadis ने Uncle Petsos and Goldbach's congecture नाम से एक रोचक उपन्यास की रचना की है।

1727 में आयलर को पीटर्सबर्ग की अकादमी में चिकित्सा विभाग में आमंत्रित किया गया, जहां उनका कार्य शरीर-विज्ञान का अध्ययन करने का था। यहां उन्होंनेज्यामिति, त्रिकोणमति, गणितीय विश्लेषण, संख्यासिद्धांत, यांत्रिकी और खगोल शास्त्र जैसे अनेक विषयों में महत्त्वपूर्ण कार्य किया। 1733 में उन्हें अकादमी की गणित की पीठ पर नियुक्त किया गया। इसी वर्ष उन्होंने केथेरीना नामक युवती से विवाह किया।

इन्हीं वर्षों में आयलर ने लघुगुणकीय आधार के लिए e का संकेत प्रचलित किया। इस संकेत का सर्वप्रथम उपयोग आयलर ने 1731 में गोल्डबाख को लिखे अपने एक पत्र में किया था। पीटर्सबर्ग में उन्हें शासन की कई तकनीकी समस्याओं पर भी कार्य करना होता थाफलस्वरूप उनकी प्रतिभा का उपयोगमानचित्रों की रचना, जहाज के निर्माण और नौ संचालन आदि में प्रचुर मात्रा में हुआ। इन्हीं आरंभिक वर्षों में उन्होंने एक अभूतपूर्व सूत्र खोज निकाला था, जो अब उनके ही नाम से जाना जाता है

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

यहां यह उल्लेख करना प्रासंगिक होगा कि उनके लिए i का संकेत भी आयलर की ही देन है। उन्होंने आयलर स्थिरांक की भी गणना की ओर दर्शाया कि

$$V = \lim_{k \to \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} - \log_e k\right]$$

$$= 0.5772$$

इस सूत्र का उपयोग श्रेणी $\sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$ के योग के लिए किया जाता है। उन्होंने गणित जगत को संकलन के लिए   और फलन के लिए $f(x)$ के संकेत दिए। एक त्रिभुज के कोणों को A, B, C से और उनके सम्मुख भुजाओं को a, b, c से दर्शाए जाने की विधि की शुरुआत भी उन्होंने की।

आयलर ने यह भी दर्शाया कि

$$= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

और $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

सेंट पीटर्सबर्ग की अपनी अवधि में, आयलर ने

बीज गणित (समीकरण सिद्धांत)

संख्या शास्त्र (अभाज्य संख्याएं)

अंक गणित

ज्यामिति (टॉपॉलॉजी)

अवकल ज्यामिति

अवकल समीकरण

विचरण कलन

श्रेणी सिद्धांत

गणितीय विश्लेषण और चलन-कलन

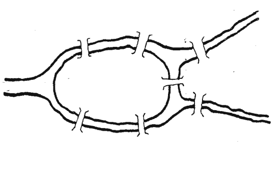
यांत्रिकी

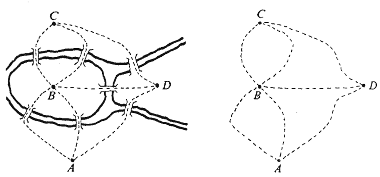
भौतिक

खगोल शास्त्र
नौकायन सिद्धांत
मौसम विज्ञान, और
संगीत

जैसे अपने विषयों को अपने शोध-कार्य से समृद्ध किया। 1731 में आयलर ने अकादमी के लिएसंगीत के सिद्धांतों पर एक विवेचनात्मक प्रबंधन लिखा, जो 8 वर्षों के उपरांत Tentamen movae theosiae musicae शीर्षक से प्रकाशित हुआ। इसी शृंखला में उन्होंने1760, 1764 और 1773 के वर्षों में तीन और प्रबंध अकादमी के लिए लिखे। इन प्रबंधों में आयलर ने स्वरसंगीत के नियमों की गणितीय विवेचना के साथ संयोजन और स्तर-व्यवस्था का भी विश्लेषण किया। जहां आयलर के पूर्ववर्ती विद्वानों ने ब्रह्मांड की विश्व-व्यवस्था से सुरों की सुसंगति बिठाते हुए संगीत की तात्त्विक विवेचना की, वहीं आयलर ने संख्याओं से अपने प्रेम के कारण संगती के स्वर-संयोजनों का ठोस गणितीय प्रारूप प्रस्तुत किया। अंतराल का लालित्य आवृत्ति की सरलता पर निर्भर हैजैसा पायथागोरियन निष्कर्षों के आधार पर आयलर नेमर्सीन, दकार्ता और लाइबनिट्ज का अनुसरण करते हुए सांगीतिक सुरीलेपन के लिए संख्यासिद्धांतारित निष्कर्ष प्राप्त किए। जाहिर है कि आयलर के विचार न तो गणितज्ञों को रास आए और न ही संगीतकारों को। गणितज्ञों के लिए वे संगीतात्मक प्रचुरता के कारण बोझिल थे तो संगीतज्ञों के लिए अपनी गणितीयता के कारण जटिल।

टॉपॉलॉजी, ग्राफ थ्योरी और नेटवर्क आज गणित की प्रोन्नत शाखाएं हैं। एक सामान्य से और जन-साधारण के कौतुहलप्रश्न से इन विधाओं का विकास हुआ। कोनिग्सबर्ग में प्रेगल नदी पर बने सात पुलों से यह कहानी शुरू होती है। वहां के निवासीसातों पुलों को एक ही बार में, किसी भी पुल पर दुबारा न जाकरपार करने की कोशिश करते थे। आयलर ने सिद्ध किया कि सातों पुल सतत चलते हुए, मार्ग को दोहराए बिना पार नहीं किए जा सकते।





उन्होंने इसके सांस्थिक प्रारूप के माध्यम से इसे नेटवर्क की समस्या में परिवर्तित कर इसका हल प्राप्त किया। आयलर का यह हल 1735 में प्रकाशित हुआ। उन्होंने यह भी सिद्ध किया कि एक बहुफलक में

किनारों की संख्या +2 = शीर्षों की संख्या + फलकों की संख्या

E+2 = V+F

आयलर का यह कार्य टापॉलॉजी, ग्राफथ्योरी और नेटवर्क के विकास के लिए आधारभूत सिद्ध हुआ।

1736 में दो खंडों में प्रकाशित

Mechanica Sive Motvs Scientia Analytice

(Mechanics or the Science of motion descibeds and latically)

उनकी एक उत्कृष्ट कृति मानी जाती है। इसमें उन्होंने यांत्रिकी के सिद्धांतों की विवेचना के लिए चलन गणित का प्रयोग किया। उन्होंने एक ठोस पिंड के लिएदीर्घवृत्तीय समाकलन के रूप में गति के नियम सूत्रबद्ध किए। इस ग्रंथ से उनकी ख्याति पूरे यूरोपीय महाद्वीप में फैल गई।

❑ 21 अगस्त, 1740 को गोल्डबाख को लिखे अपने पत्र में आयलर ने लिखा : 'यह भूगोल तो मेरे लिए जानलेवा है। इसके कारण मेरी एक आंख खराब हो गई है।' इसी पत्र में उन्होंने गोल्डबाख से अनुरोध किया कि वे अपने प्रभाव का उपयोग करते हुए, उन्हें इस विभाग के अतिरिक्त कार्यभार से मुक्त कराएं। इस विभाग के दायित्वों के अंतर्गत आयलर को सर्वेक्षण, मानचित्र बनाने जैसे कार्य भी करना पड़ते थे। फलस्वरूप उनका स्वास्थ्य खराब रहने लगा था और दाईं आंख की रोशनी जाती रही। लगभग इन्हीं वर्षों में रूस में अन्ना इवानोवना (Anna Ivanovna) की मृत्यु के बाद सत्ता संघर्ष और अनिश्चितता का युग प्रारंभ हुआ। पीटर्सबर्ग में आवासीय समस्याओं के कारण आयलर को अपना निवास सैन्य अधिकारियों और सैनिकों के साथ साझा करना पड़ता थाजो उनके लिए असुविधाजनक होता था। पीटर्सबर्ग में इन वर्षों में हुए लगातार अग्निकांडों से उनकी पत्नी बहुत चिंतित रहा करती थीं। इन सब कारणों के चलते उन्होंनेप्रशिया के सम्राट फ्रेडरिक का निमंत्रण स्वीकार करते हुएबर्लिन जाने का निश्चय किया। वे 25 जुलाई, 1741 को बर्लिन पहुंचे।

1746 में गोल्डबाख को लिखे अपने एक पत्र में उन्होंने सिद्ध किया कि : 'एक काल्पनिक संख्या का काल्पनिक घातांक, एक वास्तविक संख्या हो सकती है।'

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$, रखने पर रखने पर

$= i$

1747 में आयलर ने सिद्ध किया कि ऋणात्मक संख्याओं के लघुगुणक काल्पनिक होंगे।

$e^{i\pi} = -1$

$log\,(-1) = i\,\pi$, जो एक काल्पनिक संख्या है।

बर्लिन के अपने वर्षों में आयलर ने विचरण कलन (Calulus of Variation) विषय की आधारशिला तैयार की। यद्यपि इस विषय पर उनका प्रारंभिक प्रबंध 1738 में सेंट पीटर्सबर्ग अकादमी से प्रकाशित हुआ था। इसी विषय पर लाग्रांज को श्रेय देने के लिए उन्होंने अपना शोध-आलेख पहले प्रकाशित होने से रोक लिया था। यही नहीं, बाद में प्रकाशित अपने शोध-कार्य में उन्होंने लाग्रांज की प्रविधि की भूरि-भूरि प्रशंसा भी की थी। ऐसी उदारता कम ही देखने को मिलती है। उन्होंने अपनी पुरानी विधियों की बनिस्बत लाग्रांज की तकनीक का उपयोग करते हुए1744 में विचरण कलन पर अपना महत्त्वपूर्ण ग्रंथ प्रकाशित किया।

अस्त्रविज्ञान (Ballistics) पर उनकी कृति 1745 में प्रकाशित हुई। इसका शीर्षक था New Gsundatze de Astillerie 1777 में इसका अंग्रेजी और 1783 में फ्रेंच अनुवाद हुआ। वर्षों तक यह यूरोप के सैन्य प्रशिक्षण संस्थानों में पाठ्य-पुस्तक के रूप में पढ़ाई जाती रही।

1748 में गणितीय विश्लेषण पर उनकी उल्लेखनीय कृति Introducto in Analys in Infinitesum प्रकाशित हुई। यह एक वृहद् त्रयी का पहला भाग था। इसी क्रम में1755 में अवकल कलन के

और 1768 में समाकलन कलन के चार खंड प्रकाशित हुए। ां के माध्यम से आयलर ने गणितीय विश्लेषण और फलनों के -विषय की सुदृढ़ और परुष पृष्ठभूमि तैयार की। यहीं आयलर द्ध प्रमेय है, जिसके अनुसार

$$f_x + y\,f_y = n\,f$$

र यहीं आयलेरियन समाकलनों के रूप में बीटा, गामा फलनों वर्चा की गई है। 15वीं शताब्दी में रिकेटी की अवकल समीकरण सेद्ध हुई थी

$$y' = p(x)\,y^2 + g\,(x)\,y + s\,(x)$$

अनेक गणितज्ञों ने इसका अध्ययन किया था। आयलर, वह पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने यह दर्शाया कि, यदि

$v = f(x)$

इस समीकरण का एक विशेष हल है, तो

$$y = v + \frac{1}{z}$$

रखने पर यह समीकरण एक रेखीय अवकल समीकरण में रूपांतरित हो जाती है और इसका व्यापक हल ज्ञात किया जा सकता है।

1754 में आयलर के ज्येष्ठ पुत्र जोहान अल्बर्ट (1734-1800) बर्तिन अकादमी के सदस्य बनाए गए। उनके दूसरे पुत्र कर्ल (1740-1790) ने चिकित्सा विज्ञान में उपाधि प्राप्त की। उनका तीसरा पुत्र क्रिस्टॉफ (1743-1808) प्रशिया की आर्टिलरी में लेफ्टीनेंट था। 1763 में उनकी पुत्री चार्लेटी (1744-1780) की सगाई हालेंड के एक धनी युवक डेलेन से हुई थीजो प्रशिया की सेना में था। इस विवाह के लिए दोनों को तीन वर्ष तक सम्राट फ्रेडरिक की अनुमति की प्रतीक्षा करनी पड़ी।

बर्लिन अकादमी में कार्य करते हुए भी आयलर का संपर्क सेंट पीटर्सबर्ग से बना हुआ थाऔर उन्हें वहां से पेंशन भी मिलती थी। पर यहां फ्रेडरिक से उनके संबंध मधुर नहीं थे। फ्रेडरिक के दरबार में आयलर जैसे गंभीर व्यक्ति की बजाय वाल्तेयर जैसे चाटुकार और वाक्पटु लोगों की ज्यादा कद्र थी। फ्रेडरिक आयलर के नीरस व्यवहार से ऊब चुके थे और आयलर भी अपनी उपेक्षा और उपहास से दुखी थे। आयलर को यह आशंका भी थी कि जर्मनी में उनके पुत्रों का कोई भविष्य नहीं है। तभी रूस की सम्राज्ञी कैथरीन-द्वितीय ने1766 में आयलर को सेंट पीटर्सबर्ग वापस आने का आमंत्रण भेजा, जिसे आयलर ने स्वीकार कर लिया।

❑ 28 जुलाई, 1766 को आयलर दूसरी बार सेंट पीटर्सबर्ग पहुंचे। उन्होंने अपने लिए जो-जो सुविधाएं चाही थींवे सब की सब लगभग-लगभग, सम्राज्ञी द्वारा स्वीकार कर ली गईं। उनकी एक आंख की रोशनी तो पहले ही जा चुकी थी। पीटर्सबर्ग में उनकी बाईं आंख के मोतियाबिंद का आपरेशन हुआ, जो दुर्भाग्य से असफल रहाऔर उनकी दूसरी आंख भी बेकार हो गई। जीवन के अंतिम 14 वर्ष उन्होंने अन्धत्व की स्थिति में बिताए पर इससे उनके शोध कार्य और लेखन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ा। वे उतने ही लगनपूर्वक अपने कार्य में लगे रहे। 10 नंवबर, 1773 को उनकी पत्नी की मृत्यु हो गई। अपनी देखभाल के लिए उन्होंने अपनी पत्नी की दूर की बहन से 1776 में विवाह किया, जिसके साथ उन्होंने जीवन के अंतिम सात वर्ष सुख और शांति से गुजारे। वृद्ध आयलर के अंतिम वर्षों की गतिविधियों का

प्रभावी वर्णन जोहान बर्नाली (तृतीय) के शब्दों में ही पढ़ना बेहतर होगा। वे 1778 में आयलर के पास सेंट पीटर्सबर्ग आए थे। जोहान लिखते हैं :

His health is still quite good which he owes to a very moderate and regular life style; and he is able to make use of his vision, for the most part lost since long ago, and for some time entirely; still even better than many realize: it is true that he cannot recognize people by *their faces, nor read black on white, nor write* with pen on paper; yet with chalk he writes his mathematical calculation on a black board very clearly and in rather normal size; these are immediataly copied by one of his adjunets, Mister Fuss and Golovin (most often the former) into a large book and then from these materials are later composed memories under his direction.

76 वर्ष 5 माह और 3 दिन की आयु में 18 सितंबर 1783 को उनकी मृत्यु हुई।

❑ 1783 में ही आयलर के समकालीन फ्रेंच गणितज्ञ जॉल रान देलांबर (Jean Le Rond d' Alembert) की भी मृत्यु हुई। देलांबर की गणना फ्रांस के प्रखरतम वैज्ञानिकों एवं बुद्धिजीवियों से की जाती है। क्रांति के लिए आवश्यक बौद्धिक परिवेश को सुदृढ़ बनाने में उनका योगदान महत्त्वपूर्ण था। वे एक सैन्य अधिकारी और एक आभिजात्य महिला की अवैध सन्तान थे। उनकी मां ने जन्म के तुरंत बाद ही उन्हें पेरिस के नोत्रेदम में सेंट जॉल रान चेपल की सीढ़ियों पर छोड़ दिया था। एक कांच कर्तक दंपत्ति ने उनका लालन-पालन किया। इस बदनाम और साधारण-सी पृष्ठभूमि के बावजूद भी वे अपनी प्रतिभा के बल पर फ्रांस ही नहीं अपितु पूरे यूरोपीय महाद्वीप में अपने लिए भरपूर प्रतिष्ठा और सम्मान अर्जित करने में सफल हुए।

आंशिक अवकल समीकरणों, विश्लेषण तथा यांत्रिकी में उनका महत्त्वपूर्ण कार्य है। श्रेणियों के अभिसरण के कई नियम उन्होंने सूत्रबद्ध किए। 1743 में उनकी प्रसिद्ध कृति

Traité de dynamique

प्रकाशित हुई। ने उदार हृदय के व्यक्ति थे और अपने प्रभावी संपर्कों के कारण अन्य गणितज्ञों की भरपूर मदद करते थे। 18वीं शताब्दी के अनेक वैज्ञानिकों एवं गणितज्ञों से उनके संबंध आत्मीय और मित्रवत थे।

❑ सेंट पीटर्सबर्ग की अपनी दूसरी पारी में आयलर नेशुद्ध और प्रायोज्य गणित, खगोल, और भौतिकी पर लगभग 400 शोध-आलेख लिखे। इस अवधि की उनकी एक उल्लेखनीय कृति है

Vollständige Anleitung Zur Algebra
(Complete Guide to Algebra)

इसका रशियन अनुवाद 1768 में प्रकाशित हुआ। मूल कृति जर्मन भाषा में 1770 में प्रकाशित हुई। फ्रेंच (1774), अंग्रेजी और डच में इसका अनुवाद हुआ। यह पुस्तक अत्यंत लोकप्रिय हुई। यूक्लिड के एलीमेंट्स के बाद गणित की सर्वाधिक बिकने वाली पुस्तकों में इसकी गणना की जाती है। प्राकृतिक संख्याओं की विवेचना से प्रारंभ करते हुए आयलर ने इसमें समीकरणों और डायफॉन्टाइन समीकरणों तथा अर्निधारेय विश्लेषण की विस्तार से चर्चा की है।

यद्यपि आयलर ने संख्या सिद्धांत पर स्वतंत्र रूप से कोई प्रबंध नहीं लिखा, पर अपने पत्रों और आलेखों में कई निष्कर्षों का उल्लेख किया है।

(i) फर्मा का विश्वास था कि संख्याएं

$F_n = 2^{2^n} + 1, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$

अभाज्य हैं। आयलर ने 1732 में सिद्ध किया कि

$2^{2^5} + 1 = 4294967297$– अभाज्य नहीं है।

$= 670041 \times 614$

(ii) आयलर ने 1736 में फर्मा के लघु प्रयोग की उत्पत्ति दी।

(iii) आयलर ने आयलरफायफलन को परिभाषित किया

(m)= Numbers of integers less than m, which are prime to

और सिद्ध किया कि

$a^{\phi(m)} - 1$ is divisible by m

$if(a, m) = 1$

❑ आयलर ने लगभग पांच दशकों तक अपनी बौद्धिक उपस्थिति से गणित के प्रभामंडल को जाजल्यमान बनाए रखा। प्रसिद्ध गणितज्ञ लाप्लास अपने विद्यार्थियों से कहा करते थे : 'आयलर को पढ़ो। वो हम सबके गुरु हैं।' गाउस के लिए आयलर के कार्यों को पढ़ने से बेहतर कोई दूसरा उपक्रम नहीं था। श्रेष्ठतम गुणवत्ता के साथ अपनी विपुल रचनाधर्मिता, उर्जस्विता और बौद्धिक प्रखरता का उनका कोई उत्तराधिकारी नहीं है। शायद इसीलिए कहा जाता है किशिखर पर जो हैं, वे एकाकी ही होते हैं।