शोध पत्र / Research Paper

गुणन – T सहमानक के अंतर्गत प्रति – अस्फुट उपवलय

On Anti-Fuzzy Subring Under Product T- Conorm

संजीत कुमार[1], मनोरंजन कुमार सिंह[2]

Sanjeet Kumar[1], Manoranjan Kumar Singh[2]

[1, 2] Department of Mathematics, Magadh University, Bodh-Gaya, Bihar, India

[1] drsanjeetkumar1994@gmail.com, [2]drmksingh_gaya@yahoo.com

https://doie.org/10.0121/VP.2025540824

सारांश

इस शोध पत्र का उद्देश्य गुणन – T सहमानक के सन्दर्भ में प्रति – अस्फुट उपवलय (Anti – Fuzzy Subring) की अवधारणा से पाठकों को परिचित कराना है । इसके अतिरिक्त, इस शोध पत्र में प्रति – अस्फुट उपवलय की गुणन – T सहमानक सन्दर्भ में दी गयी परिभाषा का विश्लेषण किया गया है तथा समाकारिता के कुछ प्रमेय भी प्रतिपादित किये गए है । अंत में प्रति – अस्फुट उपवलय के गुणन (*) की अवधारणा को प्रतिपादित किया गया है तथा इससे सम्बंधित कुछ प्रमेय भी दिए गए हैं ।

Abstract

The motivation of this work is to make acquainted to the readers with the notion of anti-fuzzy subring of a ring under product T- conorm. Apart from this, analysis of the definition of anti-fuzzy subring with special reference to product of T-conorm has been carried out in this research paper and some theories are derived with a few results on homomorphism. At the end, we have proposed the concept of product (*) of anti-fuzzy subring along with some related theorems.

मुख्य शब्द : अस्फुट उपवलय, प्रति – अस्फुट उपवलय, प्रति – अस्फुट उपवलय का गुणन, प्रति – अस्फुट उपवलय की समाकारिता

Keywords: Fuzzy Subring, Anti-fuzzy Subring, Product of Anti-fuzzy Subring, Homomorphism of Anti-fuzzy Subrings

परिचय

अस्फुट समुच्चय की परिकल्पना सर्वप्रथम जादेह [1] ने की थी । इस परिकल्पना के पश्चात से ही इसका प्रयोग विविध क्षेत्रों में तेजी से बढ़ रहा है । समूह सिद्धांत (Group Theory) के क्षेत्र में अस्फुट समुच्चय का प्रयोग सर्वप्रथम रोसेनफेल्ड [2] ने किया तथा साथ ही किसी समूह के अस्फुट उपसमूह की अवधारणा को प्रतिपादित किया । इस कार्य के पश्चात अस्फुट सिद्धांत (Fuzzy Theory) के क्षेत्र में क्रांतिकारी परिवर्तन दृष्टिगत हुए तथा अस्फुटीकरण (Fuzzification) की प्रक्रिया में तेजी आई । कालान्तर में, लियूं [7] ने अस्फुट उपवलय (Fuzzy Subring) तथा अस्फुट गुणजावली (Fuzzy Ideal) की अवधारणा को प्रतिपादित किया । इसके पश्चात, अनेकों शोधकर्ताओं दीक्षित [8], मुखर्जी एवं अन्य [10] तथा सिंह [5] ने अस्फुट उपवलय तथा अस्फुट गुणजावली के कई पहलुओं की विवेचना की । इस शोध पत्र में हमने आजम एवं अन्य [9] द्वारा दी गयी प्रति – अस्फुट उपवलय की अवधारणा को परिष्कृत किया हैं तथा यह प्रदर्शित किया है कि हमारे द्वारा दी गयी अवधारणा आजम द्वारा दी गयी अवधारणा से अधिक आकर्षक है । हमने गुणन T- सहमानक के सन्दर्भ में प्रति – अस्फुट उपवलय पर आधारित कुछ प्रमेय भी प्रतिपादित किये हैं ।

परिचयात्मक

परिभाषा 1 [7] माना कि R दो द्विआधारी संक्रियाओं (+) और (.) के सापेक्ष एक वलय है तथा P, R का एक अस्फुट उपसमुच्चय है तब P को R का एक अस्फुट उपवलय कहते है यदि P द्विआधारी संक्रिया (+) के लिए अस्फुट उपसमूह (Fuzzy Subgroup) हो तथा P द्विआधारी संक्रिया (.) के लिए अस्फुट उपसमूहाभ (Fuzzy Subgroupoid) हो । अर्थात्,

(i) $P(u + v) \geq min\{P(u),P(v)\}, \ \forall u,v \in R$

(ii) $P(-u) \geq P(u), \ \forall u \in R$

(iii) $P(uv) \geq min\{P(u),P(v)\}, \ \forall u,v \in R$

परिभाषा 2 [9] माना कि R दो द्विआधारी संक्रियाओं (+) और (.) के सापेक्ष एक वलय है तथा P, R का एक अस्फुट उपसमुच्चय है तब P को R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय कहते है यदि निम्न शर्तों का पालन होता हो :–

(i) $P(u + v) \leq max\{P(u),P(v)\}, \ \forall u,v \in R$

(ii) $P(-u) \leq P(u), \ \forall u \in R$

(iii) $P(uv) \leq max\{P(u),P(v)\}, \ \forall u,v \in R$

गुणन T- सहमानक के सन्दर्भ में प्रति – अस्फुट उपवलय की अवधारणा

परिभाषा 3 माना कि R दो द्विआधारी संक्रियाओं (+) और (.) के सापेक्ष एक वलय है तथा P, R का एक अस्फुट उपसमुच्चय है तब P को R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय कहते है यदि निम्न शर्तों का पालन होता हो :–

(i) $P(u + v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v), \ \forall u,v \in R$

(ii) $P(-u) \leq P(u), \ \forall u \in R$

(iii) $P(uv) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v), \ \forall u,v \in R$

उपरोक्त दोनों परिभाषाओं के सन्दर्भ में हमारा कथन यह है कि यदि P परिभाषा 2 के अर्थ में एक प्रति – अस्फुट उपवलय है तो परिभाषा 3 के अर्थ में भी एक प्रति – अस्फुट उपवलय है किन्तु इसके विपरीत यह आवश्यक नहीं है ।

माना कि परिभाषा 2 में P, R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय है तब हमारे पास है :–

$$P(u + v) \leq max\{P(u), \ P(v)\} \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v), \ \forall u,v \in R$$

$$P(uv) \leq max\{P(u), \ P(v)\} \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v), \ \forall u,v \in R$$

इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि परिभाषा 3 के तहत P, R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय हैं किन्तु सामान्य रूप में $P(u) + P(v) - P(u)P(v) \nleq max\{P(u),P(v)\}$ सदैव सत्य नहीं है । अतः यह निष्कर्ष निकला जा सकता है कि परिभाषा 3, परिभाषा 2 से अधिक व्यापक है ।

उपरोक्त अवधारणा पर आधारित कुछ प्रमेय

प्रमेय 1 माना कि अस्फुट उपसमुच्चय P, वलय (R, + , .) का एक प्रति – अस्फुट उपवलय है तब निम्नलिखित कथन सत्य है :–

(i) $P(-u)=P(u),\ \forall\ u\in R$

(ii) $P(0) \leq 2P(u)-[P(u)]^2, \forall\ u \in R$

(iii) $P(u-v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v),\ \forall\ u,v \in R$

प्रमाण : (i) माना कि अस्फुट उपसमुच्चय P, वलय (R, + , .) का एक प्रति – अस्फुट उपवलय है तब हमारे पास है :–

$P(-u) \leq P(u)$

और $P(-(-u)) \leq P(-u)$

$i.e.,\ P(u) \leq P(-u)$

$\therefore P(-u)=P(u),\ \forall\ u \in R$

(ii) $P(u-u)=P(u + (-u))$

$=P(u) + P(-u) - P(u)P(-u)$

$=P(u) + P(u) — P(u)P(u)$

$=2P(u)-[P(u)]^2$

$i.e.,\ P(0) \leq 2P(u)-[P(u)]^2, \forall\ u \in R$

(iii) $P(u-v)=P(u + (-v))$

$\leq P(u) + P(-v) - P(u)P(-v)$

$=P(u) + P(v) - P(u)P(v)$

$i.e.,\ P(u-v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v),\ \forall\ u,v \in R$

प्रमेय 2– यदि (R, + , .) एक वलय हो तथा P, R का अस्फुट उपसमुच्चय हो, तो P को R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय कहते है यदि

$\forall\ u,v\in R, P(u-v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v)$ और $P(uv) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v)$ **के साथ** $P(0)=0$

प्रमाण : माना कि (R, + , -) एक वलय है तथा P, R का अस्फुट उपसमुच्चय इस प्रकार से है कि

$P(u-v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v),\ \forall\ u,v\in R$ .....(i)

और $P(uv) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v),\ \forall\ u,v\in R$ **के साथ** $P(0)=0$

समीकरण (i) से

$P(0-u) \leq P(0) + P(u) - P(0)P(u)$

$=0 + P(u)-0\cdot P(u)$

$=P(u)$

i.e., $P(-u) \leq P(u),\ \forall\ u \in R$

इसके अतिरिक्त $\forall$ u, v $\in$ R, हमारे पास है

$P(u + v)=P(u-(-v))$

$\leq P(u) + P(-v) - P(u)P(-v)$

$\leq P(u) + P(v) - P(u)P(v)$

i.e., $P(u + v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v)$

अतः P, R का प्रति – अस्फुट उपवलय है ।

प्रमेय 3 यदि f वलय R से R' पर एक समाकारिता है तथा P व Q क्रमशः R और R' के प्रति – अस्फुट उपवलय है तो f^{-1} (Q), R का प्रति – अस्फुट उपवलय होगा ।

प्रमाण : माना f वलय R से R' पर एक समाकारिता है तथा P व Q क्रमशः R और R' के प्रति – अस्फुट उपवलय है तथा

$\forall\, u,v \in R$ तो $u + v,\; uv \in R$ और $f(u), f(v), f(u + v), f(uv) \in R'$.

अब हमारे पास है :

$(f^{-1} (Q))(u + v)=Q(f(u + v))$

$=Q(f(u) + f(v))$ (f एक समाकारिता है)

$\leq Q(f(u)) + Q(f(v))-Q(f(u))Q(f(v))$

(Q प्रति – अस्फुट उपवलय है)

$=(f^{-1} (Q))(u) + (f^{-1} (Q))(v)-(f^{-1} (Q))(u)(f^{-1} (Q))(v)$

i.e., $(f^{-1} (Q))(u + v) \leq (f^{-1} (Q))(u) + (f^{-1} (Q))(v)-(f^{-1} (Q))(u)(f^{-1} (Q))(v)$

और $(f^{-1}$ (Q))(-u)=Q(f(-u))

=Q(-f(u)) (f एक समाकारिता है)

$\leq$ Q(f(u)) (Q प्रति – अस्फुट उपवलय है)

=(f^{-1} (Q))(u)

i.e., $(f^{-1} (Q))(-u) \leq (f^{-1} (Q))(u)$

अंततः हमारे पास है

$(f^{-1} (Q))(uv)=Q(f(uv))$

$=Q(f(u)\cdot f(v))$ (f एक समाकारिता है)

$\leq Q(f(u)) + Q(f(v))-Q(f(u))Q(f(v))$

(Q प्रति – अस्फुट उपवलय है)

$=(f^{-1} (Q))(u) + (f^{-1} (Q))(v)-(f^{-1}(Q))(u)(f^{-1}(Q))(v)$

i.e., $(f^{-1}(Q))(uv)\leq(f^{-1}(Q))(u) + (f^{-1}(Q))(v)-(f^{-1}(Q))(u)(f^{-1}(Q))(v)$

अतः f^{-1} (Q), R का प्रति – अस्फुट उपवलय है ।

प्रति – अस्फुट उपवलय के गुणक (*)

परिभाषा 4 माना कि (R, + , .) एक वलय है तथा P एवं Q, वलय R के प्रति – अस्फुट उपवलय है, तब हम दो प्रति – अस्फुट उपवलय P और Q के गुणक (*) को इस प्रकार परिभाषित करते है :–

$$(P * Q)(x)=P(x) + Q(x)-P(x)Q(x), \forall x \in R$$

उपरोक्त प्रति – अस्फुट उपवलयों के गुणक के विचार के आधार पर कुछ रोचक परिणाम स्थापित करते हैं।

प्रमेय 4 यह प्रमाणित करें कि "दो प्रति – अस्फुट उपवलयों का गुणक पुनः एक प्रति – अस्फुट उपवलय होता है ।"

प्रमाण : माना कि P एवं Q, वलय R के कोई दो प्रति – अस्फुट उपवलय है तब

$\forall u,v \in R$: परिभाषा 4 के अनुसार हमारे पास है :–

$$\begin{aligned}(P*Q)(u+v) &= P(u+v) + Q(u+v)-P(u+v)Q(u+v)\\ &\leq [P(u) + P(v)-P(u)P(v)] + [Q(u) + Q(v)-Q(u)Q(v)]-\\ &\quad [(P(u) + P(v)- P(u)P(v))(Q(u) + Q(v)-Q(u)Q(v))]\\ &= [P(u) + Q(u)-P(u)Q(u)] + [P(v) + Q(v)-P(v)Q(v)]-\\ &\quad [(P(u) + Q(u)-P(u)Q(u))(P(v) + Q(v)-P(v)Q(v))]\\ &= (P*Q)(u) + (P*Q)(v)-(P*Q)(u)(P*Q)(v)\end{aligned}$$

i.e., $(P*Q)(u+v) \leq (P*Q)(u) + (P*Q)(v)-(P*Q)(u)(P*Q)(v)$

एवं

$$\begin{aligned}(P*Q)(-u) &= P(-u) + Q(-u)-P(-u)Q(-u)\\ &\leq P(u) + Q(u)-P(u)Q(u)\\ &= (P*Q)(u)\end{aligned}$$

i.e., $(P*Q)(-u) \leq (P*Q)(u)$

अंततः हमारे पास है

$$\begin{aligned}(P*Q)(uv) &= P(uv) + Q(uv)-P(uv)Q(uv)\\ &\leq [P(u) + P(v)-P(u)P(v)] + [Q(u) + Q(v)-Q(u)Q(v)]-\\ &\quad [(P(u) + P(v)- P(u)P(v))(Q(u) + Q(v)-Q(u)Q(v))]\\ &= [P(u) + Q(u)-P(u)Q(u)] + [P(v) + Q(v)-P(v)Q(v)]-\\ &\quad [(P(u) + Q(u)-P(u)Q(u))(P(v) + Q(v)-P(v)Q(v))]\\ &= (P*Q)(u) + (P*Q)(v)-(P*Q)(u)(P*Q)(v)\end{aligned}$$

i.e., $(P*Q)(uv) \leq (P*Q)(u) + (P*Q)(v)-(P*Q)(u)(P*Q)(v)$

इससे यह प्रमाणित होता है कि दो प्रति – अस्फुट उपवलयों का गुणक पुनः एक प्रति – अस्फुट उपवलय होता है ।

प्रमेय 5– यदि P, Q एवं R एक वलय S के प्रति – अस्फुट उपवलय है, तो प्रति – अस्फुट उपवलयों के द्वारा दर्शाया गया गुणन (*) साहचर्य एवं क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन करता है ।

प्रमाण : माना कि S एक वलय है और P, Q एवं R वलय S के प्रति – अस्फुट उपवलय है तो

$\forall$ u,∈S, परिभाषा 4 के अनुसार हमारे पास है :–

$$[P*(Q*R)](u)=P(u) + (Q*R)(u)-P(u)(Q*R)(u)$$
$$=P(u) + Q(u) + R(u)-Q(u)R(u)-P(u)[Q(u) + R(u)-Q(u)R(u)]$$
$$=P(u) + Q(u) + R(u)-Q(u)R(u)-P(u)Q(u) - P(u)R(u) + P(u)Q(u)R(u)$$
$$=P(u) + Q(u)-P(u)Q(u) + R(u)-(P(u) + Q(u)-P(u)Q(u))R(u)$$
$$=(P*Q)(u) + R(u)-(P*Q)(u)R(u)$$
$$=[(P*Q)*R](u)$$
$$\therefore [P*(Q*R)](u)=[(P*Q)*R](u)$$

i.e., $[P*(Q*R)]=[(P*Q)*R]$

अतः वलय S के प्रति – अस्फुट उपवलयों के द्वारा दर्शाया गया गुणन (*) साहचर्य गुणधर्म का पालन करता है ।

अंततः हमारे पास है

$(P*Q)(u)=P(u) + Q(u)-P(u)Q(u)$ और $(Q*P)(u)=Q(u) + P(u)-Q(u)P(u)$

चूँकि P(u) एवं Q(u) संवृत्त अंतराल [0,1] में संख्याएँ है, अतः

$$P(u) + Q(u)-P(u).Q(u)=Q(u) + P(u)-Q(u).P(u)$$
$$\therefore (P*Q)(u)=(Q*P)(u)$$
$$\Rightarrow P*Q=Q*P$$

अतः वलय S के प्रति – अस्फुट उपवलयों के द्वारा दर्शाया गया गुणन (*) क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन करता है ।

अभिस्वीकृति

लेखक संजीत कुमार; वैज्ञानिक और औद्योगिक अनुसन्धान परिषद्, नई दिल्ली को वरिष्ठ अनुसंधान अध्येतावृति प्रदान करने के लिए धन्यवाद ज्ञापित करते है ।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिंदी शब्दावली
Anti - Fuzzy subring	प्रति – अस्फुट उपवलय
Conorm	सहमानक
Homomorphism	समाकारिता

Fuzzification	अस्फुटीकरण
Fuzzy group	अस्फुट समूह
Fuzzy groupoid	अस्फुट समूहाभ
Fuzzy ideal	अस्फुट गुणजावली
Fuzzy ring	अस्फुट वलय
Fuzzy set	अस्फुट समुच्च्य
Fuzzy theory	अस्फुट सिद्धांत

सन्दर्भ

[1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets", Information and control, 128 (1965) 338-353.

[2] A. Rosenfeld, "Fuzzy Groups'', Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 (1971) 512-517.

[3] R. Biswas., "Fuzzy Subgroup and Anti Fuzzy Subgroups", Fuzzy Sets and Systems, 35 (1990) 121- 124.

[4] P. S. Das, "Fuzzy Groups and level Subgroups'' Journal of Mathematical Analysis and Applications, 84 (1981) 264-269.

[5] M. K. Singh., "Theory of Fuzzy Structures and Applications", Lambert Academic Publishing, Germany, 2010.

[6] S. Gayen., S. Jha., M. K. Singh., A. K. Prasad, "On Anti- Fuzzy Subgroup", Yugoslav Journal of Operations Research xx (2020).

[7] W. Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and System 8 (1982) 133-139.

[8] Dixit, R. Kumar and N. Ajmal, On fuzzy Rings, Fuzzy Sets and System 49 (1992) 205-213.

[9] F. A. Azam, A. A. Mamun and F. Nasrin, Anti-fuzzy ideal of a ring, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics (2013) 349-360.

[10] T. K. Mukherjee and M. K. Sen, On fuzzy ideals of a ring I, Fuzzy Sets and System 21 (1987) 99-104.