शोध पत्र / Research Paper

प्रतिलोम यूलर फाई–फलन की अवधारणा
Concept on Inverse Euler Phi-function

सौभाग्य त्रिपाठी[1], अमित शर्मा[2]
Saubhagya Tripathi[1], Amit Sharma[2]
[1, 2] Dept. of Mathematics and Humanities, SVNIT, Surat (395007)
[1] saubhagyasvnit2001@gmail.com, [2] amitsharma@amhd.svnit.ac.in
https://doie.org/10.0820/VP.2024947515

सारांश

इस शोध पत्र में प्रतिलोम यूलर फाई–फलन पर विचार किया गया है, विशेष रूप से उस पूर्णांक n की पहचान पर मुख्य ध्यान केंद्रित किया गया है जिसके लिए $\phi(n)$ एक निर्दिष्ट मान k के बराबर होता है। जांच व्यवस्थित रूप से समस्या को अलग–अलग मामलों में विभाजित करती है, समाधान प्रदान करती है और समाधान की संभावित संख्या का अनुमान लगाती है, यदि हो। कारमाइकल टोटिएंट फलन अटकल को प्रमाणित करने में एक उल्लेखनीय योगदान निहित है। प्रतिलोम यूलर फाई–फलन की सीमित समझ को देखते हुए, विश्लेषणात्मक दृष्टिकोण यूलर फाई–फलन के गुणों और k के अभाज्य गुणनखंडन का लाभ उठाता है। प्रस्तावित शोध पत्र उन मामलों से शुरु होता है जहां k का रूप $2p$ जैसा है, और फिर टिप्पणियों के आधार पर इसके दायरे का विस्तार करता है। एक महत्वपूर्ण परिणाम, प्रासंगिक प्रमेयों के साथ $k = 2^l$ मामले के लिए एक व्यापक समाधान निकालना भी है। साथ ही $k = 2^l p$ के लिए निर्धारित समाधान की ऊपरी सीमा का पता लगाया गया है। शोध पत्र अंतर्दृष्टिपूर्ण टिप्पणियों के साथ समाप्त होता है और आगे की जांच के लिए प्रासंगिक प्रश्न उठाता है।

Abstract

This paper considers the inverse Euler phi-function, with a particular focus on identifying the integer n for which $\phi(n)$ is equal to a specified value k. The investigation systematically breaks down the problem into separate cases, provides solutions, and estimates the possible number of solutions, if any. A notable contribution lies in proving the Carmichael totient function conjecture. Given the limited understanding of the inverse Euler phi-function, the analytical approach takes advantage of the properties of the Euler phi-function and the prime factorization of k. The manuscript starts with cases where k is of the form $2p$, expanding its scope based on observations. An important result is the derivation of a generalized solution for k = 2^l with some related theorems. The upper bound of the solution set for k = $2^l p$ has been found. The paper concludes with insightful comments and raises relevant questions for further investigation.

मुख्य शब्दः प्रतिलोम यूलर फाई–फलन, यूलर फाई–फलन, कारमाइकल टोटिएंट फलन अटकल

Keywords: Inverse Euler phi-function, Euler phi-function, Carmichael Totient Function Conjecture

परिचय

यूलर फाई–फलन (Euler Phi-function), जिसे $\phi(n)$ द्वारा निरूपित किया जाता है, संख्या–सिद्धांत (Number Theory) में एक प्रसिद्ध फलन है जो n से कम या बराबर उन धनात्मक पूर्णांकों की संख्या की

गणना करता है जो n के लिए अपेक्षाकृत अभाज्य हैं। दूसरे शब्दों में, $\phi(n)$ पूर्णांक संख्या k है जिसमें $1 \leq k \leq n$ है और म. स. प $(k,n) = 1$ है।

प्रतिलोम यूलर फाई–फलन (Inverse Euler Phi-function) वह फलन है जो यूलर फाई–फलन (Euler Phi-function) का उल्टा है। यूलर फाई–फलन में, हमें एक सकारात्मक मान "n" दिया जाता है, और इसके फलन की k के रूप में गणना की जाती है, जैसे कि $\phi(n) = \mathrm{k}$ ।

प्रतिलोम यूलर फाई–फलन में, एक धनात्मक पूर्णांक "k" दिया जाता है और इसका उद्देश्य उन सभी धनात्मक पूर्णांकों n का पता लगाना है जिसमें कि $\phi(n) = k$ हो । यह संख्या–सिद्धांत में एक आकर्षक समस्या है ।

प्रतिलोम यूलर फाई–फलन का अध्ययन करने में मुख्य चुनौतियों में से एक यह है कि सभी समाधानों को खोजने के लिए कोई सूत्र या कलन–विधि नहीं है। हम यह भी नहीं बता सकते कि कोई समाधान होगा या नहीं, और अगर है, तो कितने समाधान हैं। हालाँकि, कई विशेष मामले हैं जिनका विस्तार से अध्ययन किया गया है। उदाहरण के लिए, यह ज्ञात है कि यदि k विषम है, तो समीकरण $\phi(n) = k$ का कोई समाधान नहीं है।

प्रतिलोम यूलर फाई–फलन का संबंध संख्या–सिद्धांत में कई अन्य महत्वपूर्ण समस्याओं से है, जैसे कि कारमाइकल अटकल और अभाज्य संख्याओं का अध्ययन। इस कार्य को समझने में हुई प्रगति के बावजूद, कई प्रश्न खुले हैं और अनुसंधान के इस क्षेत्र में अभी भी बहुत काम किया जाना बाकी है।

परिभाषा

यूलर फाई–फलन दिए गए पूर्णांक n से कम के धनात्मक पूर्णांकों की गणना करता है जो n के लिए अपेक्षाकृत अभाज्य हैं, जिसे यूलर टोटिएंट फलन (Euler's Totient function) [1] भी कहा जाता है, और इसे ग्रीक अक्षर ϕ द्वारा दर्शाया जाता है।

उदाहरण के लिए, यदि $n = 4$ है, तो 4 से कम पूर्णांक 1,2,3 हैं और उनमें से 1 और 3 अपेक्षाकृत 4 के लिए अभाज्य हैं। इसलिए, $\phi(4) = 2$ है। इसी तरह, यदि $n = 6$, तो $\phi(6) = 2$ है, क्योंकि 1 और 5 केवल 6 के लिए अपेक्षाकृत अभाज्य संख्याएँ हैं। परंपरा के अनुसार, हम $\phi(1) = 1$ मानते हैं।

फाई–फलन निम्नलिखित गुणों को संतुष्ट करता है:

1. मान लीजिए कि p एक अभाज्य है, तो $\phi(p) = p-1$ और $\phi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$ है ।
2. ϕ फलन गुणक (multiplicative) है, अर्थात, यदि m और n अपेक्षाकृत अभाज्य हैं, तो $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \, . \, \phi(n)$ होगा।
3. किसी भी संख्या $n = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_i^{l_i}$, के लिए $\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ है।
4. जब $n>2$ हो, तो $\phi(n)$ हमेशा सम होता है।

ऊपर वर्णित गुणों का उपयोग करते हुए, किसी भी दिए गए n के लिए ϕ का मान निर्धारित करना एक आसान काम है। हालांकि, समीकरण $\phi(n) = k$ का समाधान खोजना, जहां k एक दिया गया मान है, एक खुली समस्या बनी हुई है जिसके लिए आगे की जांच की आवश्यकता है। वर्तमान में, कोई ज्ञात सूत्र नहीं है जो इस समीकरण के लिए एक समाधान समुच्चय प्रदान कर सकता है या विशिष्ट परिस्थितियों में एक समाधान के अस्तित्व को निर्धारित कर सकता है।

कारमाइकल टोटियंट फलन अटकल [2] एक सिद्धांत है जिसका इस समस्या से एक मजबूत संबंध है। यह बताता है कि यदि समीकरण $\phi(n) = k$ का समाधान है, तो समाधान समुच्चय में कम से कम दो समाधान होते हैं। समीकरण के समाधान समुच्चय और उसके गुणों को समझने के लिए इस अटकल के महत्वपूर्ण निहितार्थ हैं।

मुख्य समस्या

माना कि $A(k)$ समुच्चय $\{n:\phi(n) = k\}$ को दर्शाता है। यह किसी दिए गए k के लिए प्रतिलोम यूलर फाई–फलन का समाधान समुच्चय है।

इस शोध पत्र का मुख्य कार्य एवं ध्यान इस समाधान समुच्चय को ढूंढने की ओर है तथा इसकी प्रमुखता पर टिप्पणी करना है।

समस्या पर मौजूदा साहित्य

प्रतिलोम यूलर फाई–फलन की समस्या लंबे समय से अज्ञात है। यूलर फाई–फलन के लिए सामान्य सूत्र ज्ञात है, इसलिए पहला दृष्टिकोण यह सोचना था कि प्रतिलोम फलन को किसी दिए गए n के लिए परीक्षण द्वारा हल किया जा सकता है। हालाँकि, चूंकि समीकरण का कोई समाधान नहीं हो सकता है, कुछ समाधान या कई समाधान हो सकते हैं, इसलिए ऐसी प्रणाली स्पष्ट रूप से अक्षम थी। प्रारंभ में, गणितज्ञों ने एक तालिका बनाने की भी कोशिश की जिसमें k के दिए गए मानों के लिए $\phi(n) = k$ का समाधान दिखाया गया है। इस दृष्टिकोण की कमी यह थी कि हमारे पास $\phi(n) = k$ के लिए एक समाधान n हो सकता है जो [4] की तालिका में शामिल नहीं है।

प्रतिलोम यूलर फाई–फलन को हल करने के लिए कुछ विधियों का प्रस्ताव किया गया है [5]। एक दृष्टिकोण यह था कि सबसे पहले दी गई संख्या k को कुछ संभावित कारकों $k_1, k_2, \ldots, k_j$ में इस तरह से हल किया जाए कि कुछ अभाज्य संख्याओं $p_1, p_2, \ldots, p_j$, के लिए, हमारे पास $\phi(p_i^{e_i}) = k_i$, कुछ e_i के लिए है, आये। ϕ के गुणक गुण का उपयोग करके, कोई भी n के लिए परिणाम पा सकें। एक अन्य विधि, जिसमें $M(k)$ नामक एक संख्या प्राप्त करना शामिल था ताकि समीकरण $\phi(n) = k$ के सभी समाधान इसके भाजक हों, जिसको कारमाइकल ने वर्णित किया था [6]। समीकरण $\phi(n) = k$ को हल करने की एक सामान्य विधि [7] में प्रदान की गई है। यह तकनीक किसी भी स्थिति में बिना किसी आवश्यकता के n की गणना करना संभव बनाती है, लेकिन यह केवल n के छोटे मानों के लिए वास्तव में उपयोगी है। नतीजतन, ऊपर उल्लिखित सभी विधियों में समय लेने के अलावा कुछ और कमियां भी हैं।

हमारा दृष्टिकोण

हम इस शोध पत्र में समीकरण $\phi(n) = k$ के समाधान समुच्चय को निर्धारित करने के लिए विभिन्न दृष्टिकोण पेश कर रहे हैं। हम शुरु में विशिष्ट प्रकार के k के मानों पर ध्यान केंद्रित करके बड़ी समस्या को छोटे में विभाजित करते हैं। इस समस्या को व्यापक रूप से हल करने के लिए, हम निम्नलिखित परिणाम प्रस्तुत करते हैं, जो k के विभिन्न संभावित मूल्यों को शामिल करते हैं।

प्रमेय 1: यदि $k = 2p$ है, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है और $p \geq 5$ है, तो $|A(k)|$ या तो 0 है या फिर 2 होगा।

प्रमाणः मानाकि n एक ऐसा धनात्मक पूर्णांक है कि $\phi(n) = 2p$ है। मानाकि α एक अभाज्य संख्या है कि $\alpha^l \mid n$ और $\alpha^{l+1} \nmid n$, जहाँ l एक धनात्मक पूर्णांक है। अंकगणित के मूलभूत प्रमेय द्वारा, हम n को $n = \alpha^l n'$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ α और n' सह–अभाज्य हैं। इसके बाद, हम $\phi(n)=\phi(\alpha^l)\cdot\phi(n')=\alpha^{l-1}(\alpha-1)\phi(n')=2p$ प्राप्त करते हैं। चूँकि दाहिने हाथ की ओर एक–एक की घात के साथ दो अभाज्य कारक हैं, इसलिए यह इस प्रकार है कि l केवल 1 या 2 के बराबर हो सकता है।

जब $l = 1$ हैः तब $\phi(n) = (\alpha-1)\phi(n')$ है अतः, $(\alpha-1)|2p$। चूंकि $(\alpha-1)$ या तो विषम या सम हो सकता है, यदि यह विषम है, तो α, 2 के बराबर होना चाहिए, जो $\phi(n') = 2p$, मूल समस्या की ओर ले जाता है। इसलिए, यह विचार सहायक नहीं है, और हम मान लेंगे कि $(\alpha-1)$ सम है। चूँकि $(\alpha-1)$ सम है, हमारे पास $(\alpha-1)$ या तो 2 या $2p$ के बराबर

है। यह आगे तात्पर्य देता है कि α, 3 या $(2p + 1)$ के बराबर है यदि $\alpha = 3$, तो $\phi(\alpha) = 2$ होगा । यह $2\phi(n') = 2p$ देता है, जिसका अर्थ है, $\phi(n') = p$ है ।

हालाँकि, यह संभव नहीं है, इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि α,3 के बराबर नहीं हो सकता है। यदि $\alpha = (2p+1)$ है तो इसका अर्थ है कि $(2p+1)$ अभाज्य है और $\phi(\alpha) = 2p$ है। इस प्रकार, हमारे पास $\phi(n') = 1$ है, जिसका तात्पर्य है कि $n' = 1$ या 2 है। इसलिए, समाधान $n = (2p+1)$ और 2 $(2p+1)$ हैं।

जब $l = 2$ है: जैसा कि $\phi(\alpha^2\ ) = \alpha(\alpha-1)$ यह इस प्रकार है कि $\alpha\ (\alpha-1)$ को $2p$ को विभाजित करना चाहिए। यह स्पष्ट है कि α केवल 2 या p के बराबर हो सकता है। यदि $\alpha = 2$, तो $2\phi(n') = 2p$ होगा। हालाँकि, $\phi(n')$, p के बराबर नहीं हो सकता है, जो एक विरोधाभास की ओर ले जाता है। यदि $\alpha = p$, तो $(p-1)$ । 2 इसलिए, हमारे पास $p = 2$ या 3 होना चाहिए, जो दोनों संभव नहीं हैं।

इसलिए, $k = 2p$ के लिए जहां $p \geq 5$, हमारे पास $|A(k)| = 0$ या 2 है। समाधान केवल तभी मौजूद होता है जब $(2p + 1)$ एक अभाज्य संख्या हो।

ध्यान दें कि उपरोक्त प्रमेय में, हमने मान लिया कि $p>3$ है। हालाँकि, यदि हम $p = 3$ लेते हैं, तो हमारे पास $k = 6$ और $|A\ (k)| = 4$ होगा।

एक बार जब प्रमाण का सार समझ में आ जाता है, तो यह स्पष्ट हो जाता है कि प्रतिलोम फलन का समाधान k के अभाज्य कारकों की संख्या से संबंधित है। इस अवलोकन को k के अन्य मूल्यों तक बढ़ाया जा सकता है, जैसे कि $\mathrm{k} = 2p^2$। वास्तव में, हम इस परिणाम को सामान्यीकृत कर सकते हैं और इसे p के किसी भी घात m पर लागू कर सकते हैं। समीकरण $\phi(n) = 2p^m$ के लिए, जहाँ $p \geq 5$,0 या 2 समाधान हो सकते हैं। समाधान केवल तभी मौजूद होंगे जब $(2p^m+1)$ अभाज्य होगा, और वे $(2p^m+1)$ और 2 $(2p^m+1)$ होंगे।

प्रमेय 2: यदि $k = 2pq$, p और q विषम अभाज्य संख्याएँ हैं, $p>$q, तो $|A\ (k)| = 0$ या 2 या 4 होगा।

प्रमाण: हमारे पास $\phi(n) = 2pq$ है। मान लीजिए कि α एक अभाज्य संख्या है और l एक धनात्मक पूर्णांक है जैसे कि $\alpha^l \mid n$ और $\alpha^{l+1} \nmid n$। तब n को $n = \alpha^l{\cdot}n'$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार, $\phi(n) = \alpha^{l-1}(\alpha-1){\cdot}\phi(n')$ होगा। यह दिया गया है कि $\phi(n) = 2pq$, जो हमें $\alpha^{l-1}(\alpha-1)$ । $2pq$ देता है। चूँकि दाहिने हाथ की ओर तीन अभाज्य कारक हैं जिनमें से प्रत्येक में घात एक है, l केवल 1 या 2 के बराबर हो सकता है।

उस मामले पर विचार करें जहाँ $l = 1$ है। इसका तात्पर्य है कि $(\alpha-1)$, $2pq$ को विभाजित करता है। इस प्रकार, $(\alpha-1)$ या तो 2, $2p$, $2q$, या $2pq$ हो सकता है। हालाँकि, यदि $(\alpha-1)$ 2, $2p$ या $2q$ के बराबर होगा, तो यह इस प्रकार है कि $\phi(n')$, 1 से बड़ी एक विषम संख्या होगी, जो एक विरोधाभास है।

दूसरी ओर, यदि $\alpha = (2pq + 1)$ तो α अभाज्य है और $\phi(\alpha) = 2pq$ है। यह $\phi(n') = 1$ की ओर ले जाता है, जिसका अर्थ है कि n' का मान 1 या 2 के बराबर है। इसलिए, n के लिए संभावित समाधान $(2pq+1)$ और 2 $(2pq+1)$ हैं।

अब उस मामले पर विचार करें जहाँ $l = 2$ है। इसका मतलब है कि $\alpha\ (\alpha-1)$,$2pq$ को विभाजित करता है। यह स्पष्ट है कि α केवल 2, p या q के बराबर हो सकता है। हालाँकि, यदि $\alpha = 2$ है, तो $\phi(n')$,1 से बड़ी एक विषम संख्या होगी, जो असंभव है।

यदि $\alpha = p$, तो $(p-1)$, $2q$ को विभाजित करता है। इसका तात्पर्य है कि p या तो 3 या $(2q+1)$ के बराबर है। लेकिन अगर $p = 3$, तो $\phi(n') = q$ होगा, जो एक विरोधाभास है। दूसरी ओर, यदि $p = (2q + 1)$ है, तो $(2q+1)$ अभाज्य है और $\phi(n') = 1$ है। यह n के p^2 या $2\mathrm{p}^2$ होने के संभावित मानों की ओर ले जाता है।

यदि $\alpha = q$ है, तो $(q-1),2p$ को विभाजित करता है। इसका तात्पर्य है कि q या तो 3 या $(2p+1)$ के बराबर है। हालांकि, $p>q$ से q, $(2p+1)$ के बराबर नहीं हो सकता है। इसके अलावा, यदि $q = 3$, तो $\phi(n') = p$, जो एक विरोधाभास है।

इसलिए, यदि $k = 2pq$, तो $|A(k)|$ केवल 0,2, या 4 हो सकता है, और समाधान केवल तभी मौजूद होगा जब $(2pq+1)$ एक अभाज्य संख्या है या यदि $p = (2q+1)$ है। दूसरे शब्दों में, समाधान इस प्रकार हैं: यदि $(2pq+1)$ एक अभाज्य संख्या है, तो n या तो $(2pq+1)$ या $2\ (2pq+1)$ हो सकता है और यदि $p = (2q+1)$ है तो n या तो p^2 या $2p^2$ हो सकता है। इससे समाधान समाप्त हो जाता है।

किसी भी संख्या में अभाज्य संख्याओं का सामान्यीकरण सीधा है। मान लीजिए $k = 2p_1\ p_2\ p_3 \cdots p_i$, जहाँ p_1 सबसे बड़ा अभाज्य कारक है, फिर या तो 0, 2, या 4 समाधान होंगे। यदि समाधान मौजूद हैं, तो वे $(2p_1\ p_2\ p_3 \cdots p_i + 1)$ और $2\ (2p_1\ p_2\ p_3 \cdots p_i + 1)$ होंगे यदि $(2p_1\ p_2\ p_3 \cdots p_i + 1)$ अभाज्य है या $(p_1^2$ और $2p_1^2)$ होंगे यदि $p_1 = 2p_2\ p_3 \cdots p_i$ है।

हमारे पिछले विश्लेषण में ऐसे मामलों को शामिल किया गया था जहाँ $k = (4m+2)$ था । अब हम 2 की उच्च घात से निपटने का लक्ष्य रखते हैं। हम उस विशेष मामले की जांच करके शुरू करते हैं जहाँ k,2 की घात है, अर्थात, $k = 2^l$,l एक धनात्मक पूर्णांक है।

यह स्पष्ट है कि समुच्चय $A\ (2^l)$ खाली नहीं है। हम अपने पिछले विश्लेषण से जानते हैं कि $\phi(2^{l+1}) = 2^l$ होता है, जिसका तात्पर्य है कि $(2^{l+1}) \in A(2^l)$। इसके अतिरिक्त, $(3.2^l) \in A(2^l)$, चूंकि $\phi(3.2^l) = 2 \cdot 2^{l-1} = 2^l$ होता है। इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि जब $k = 2^l$, तो कारमाइकल का अटकल लागू होता है।

हमारा उद्देश्य n के सभी संभावित मानों को निर्धारित करना है, जब $\phi(n) = 2^l$ है। हम देखते हैं कि $\phi(n)$ के कारक के रूप में एक विषम अभाज्य नहीं हो सकता है। इसलिए n में 2 से अधिक या उसके बराबर घात का एक विषम अभाज्य नहीं हो सकता है, क्योंकि इसके कारक के रूप में $\phi(p^\alpha) = p^{(\alpha-1)}(p-1)$ में एक विषम कारक होता है। यदि n में 2 से अधिक या उसके बराबर घात का एक विषम अभाज्य p है, तो $p^{(\alpha-1)},2^l$ को विभाजित करता है, जिसका अर्थ है $p^{(\alpha-1)} = 1$। इस प्रकार, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि n में 2 से अधिक या उसके बराबर घात का विषम अभाज्य नहीं हो सकता है।

इसके बाद, मान लीजिए कि p, n का एक विषम अभाज्य कारक है। फिर, $\phi(p) = (p-1)$, 2^l को विभाजित करता है, जिसका अर्थ है कि p या तो 2 है या कुछ $m \le l$ के लिए $(2m+1)$ रूप का एक अभाज्य कारक है। केवल पाँच ज्ञात फर्मेट अभाज्य संख्याएँ हैं: 3, 5, 17, 257 और 65537। इसलिए n में केवल 2, 3, 5,17, 257 या 65537 के अभाज्य कारक हो सकते हैं। इसके अतिरिक्त n में विषम अभाज्य संख्याओं की घात 1 से अधिक नहीं हो सकती हैं। इस प्रकार 3, 5, 17, 257 या 65537 की घात केवल 0 या 1 हो सकती हैं।

संख्या n या तो विषम या फिर सम हो सकती है। जब n सम होता है, तो इसे $n = 2^{(\gamma+1)} \cdot 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot 17^{\alpha_3} \cdot 257^{\alpha_4} \cdot 65537^{\alpha_5}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहां $\gamma \ge 0$ और α_i सभी i के लिए 0 या 1 हैं।

चूंकि $\phi(n) = 2^l$, हमारे पास है,

$$\phi(2^{\gamma+1}.3^{\alpha_1}.5^{\alpha_2}.17^{\alpha_3}.\ 257^{\alpha_4}.65537^{\alpha_5})=2^l,$$

$$\phi(2^{\gamma+1}).\ \phi(3^{\alpha_1}).\ \phi(5^{\alpha_2}).\ \phi(17^{\alpha_3}).\ \phi(257^{\alpha_4}).\ \phi(65537^{\alpha_5})=2^l$$

इस प्रकार, हमें $2^{(\gamma+\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+8\alpha_4+16\alpha_5)} = 2^l$ मिलता है, जिसका अर्थ है

$$\gamma+\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+8\alpha_4+16\alpha_5 = l.$$

इसलिए, यदि $\phi(n) = 2^l$ और n सम है, तो इसे $2^{(\gamma+1)} \cdot 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot 17^{\alpha_3} \cdot 257^{\alpha_4} \cdot 65537^{\alpha_5}$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहां $\gamma \geq 0$ और α_i सभी i के लिए 0 या 1 हैं, शर्त के अधीन $\gamma+\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+8^{\alpha_4}+16\alpha_5 = l$

जब n विषम होता है, तो इसे $n = 3^{\alpha_1}\cdot5^{\alpha_2}\cdot17^{\alpha_3}\cdot257^{\alpha_4}\cdot65537^{\alpha_5}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहां α_i सभी n के लिए 0 या 1 हैं।

चूंकि $\phi(n) = 2^l$, हमारे पास है: $\phi(n) = \phi(3^{\alpha_1}\cdot5^{\alpha_2}\cdot17^{\alpha_3}\cdot257^{\alpha_4}\cdot65537^{\alpha_5})$। यह $\phi(3^{\alpha_1})\cdot\phi(5^{\alpha_2})\cdot\phi(17^{\alpha_3})\cdot\phi(257^{\alpha_4})\cdot\phi(65537^{\alpha_5}) = 2^l$ देता है। इसे और सरल बनाते हुए, हमें $2^{(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+8\alpha_4+16\alpha_5)} = 2^l$ मिलता है, जिसका अर्थ है $\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+8^{\alpha_4}+16\alpha_5 = l$।

इस प्रकार, $\phi(n) = 2^l$ के लिए, यदि n विषम है, तो यह $3^{\alpha_1}\cdot5^{\alpha_2}\cdot17^{\alpha_3}\cdot257^{\alpha_4}\cdot65537^{\alpha_5}$ के रूप में है, α_i सभी i के लिए 0 या 1 है, शर्त के अधीन $\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+8\alpha_4+16\alpha_5 = l$ ।

अब हमारे पास समीकरण $\phi(n) = 2^l$ के लिए एक व्यापक समाधान है। इसे एक प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय 3: किसी धनात्मक पूर्णांक l के लिए $k = 2^l$ लें। तब समीकरण $\phi(n) = \mathrm{k}$ का कोई भी समाधान n इस रूप का होता है:

1. यदि n सम है, तो $n = 2^{\gamma+1}\cdot3^{\alpha_1}\cdot5^{\alpha_2}\cdot17^{\alpha_3}\cdot257^{\alpha_4}\cdot65537^{\alpha_5}$, जहाँ $\gamma \geq 0$ और $\alpha_i \in \{0,1\}$ सभी i के लिए, शर्त के अधीन $\alpha_1+2\alpha_2+4^{\alpha_3}+8^{\alpha_4}+16^{\alpha_5} = l$ है।
2. यदि n विषम है, तो $n = 3^{\alpha_1}\cdot5^{\alpha_2}\cdot17^{\alpha_3}\cdot257^{\alpha_4}\cdot65537^{\alpha_5}$, जहाँ $\alpha_i \in \{0,1\}$, सभी i के लिए, शर्त के अधीन $\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+8\alpha_4+16\alpha_5= l$ है।

परिणाम : $k = 2^l$ और $l \leq 31$ के लिए, $\phi(n) = \mathrm{k}$ का एक अनूठा विषम समाधान है।

परिणाम : $l \leq 31$ के लिए, $\phi(n) = 2^l$ के लिए (l + 2) समाधान हैं।

परिणाम : $k = 2^l$ और $l \geq 32$ के लिए, $\phi(n) = \mathrm{k}$ के लिए कोई विषम समाधान नहीं हैं।

प्रमेय 4: $l \geq 32$ के लिए, $\phi(n) = 2^l$ के 32 समाधान मौजूद हैं।

निरीक्षण: यदि किसी अभाज्य p के लिए $\mathrm{k} = 2^l p$ है, तो $|A(\mathrm{k} = 2^l p)|$ के लिए ऊपरी सीमा इस प्रकार दी जा सकती है:

$l \leq 31$ के लिए:

$$|A(2^l p)| \leq \sum_{i=1}^{l-1}|A(2^i p)| + \sum_{i'=1}^{l-1}|A(2^{i'} p)| + \sum_{j=2}^{l+2} j$$

इस शर्त के अधीन कि $(2^{(l-i')}+1)$ एक अभाज्य है।

$l \geq 32$ के लिए:

$$|A(2^l p)| \leq \sum_{i=1}^{l-1}|A(2^i p)| + \sum_{i'=1}^{l-1}|A(2^{i'} p)| + \sum_{j=2}^{33} j + 32\sum_{j'=1}^{l-31} 1$$

इस शर्त के अधीन कि $(2^{(l-i')}+1)$ एक अभाज्य है।

निष्कर्ष और भावी कार्य

यूलर फाई–फलन के प्रतिलोम को खोजने की समस्या, अध्ययन का एक चुनौतीपूर्ण और आकर्षक क्षेत्र है। हालांकि वर्तमान में कोई सामान्य समाधान मौजूद नहीं है, हम कुछ विशिष्ट मामलों के लिए इसे हल करने की ओर अग्रसर हैं। हमारे शोध ने कारमाइकल अटकल के साथ संबंधों का भी खुलासा किया है और हमें उन मामलों में समाधानों की संख्या पर ऊपरी सीमा स्थापित करने की अनुमति दी है जहां पूर्ण समाधान हमारे पास नहीं हैं। इस प्रगति के बावजूद, इस समस्या के कई पहलू अभी भी हैं जो आगे की जांच के लिए खुले हैं।

1. जब $k = \mathrm{b}!$, किसी प्राकृतिक संख्या b के लिए, तो समीकरण $\phi(n) = \mathrm{k}$ हमेशा हल करने योग्य [8] होता है।

k	1!	2!	3!	4!	5!	6!
|A(k)|	2	3	4	10	17	49
k	7!	8!	9!	10!	11!	…
|A(k)|	93	359	1138	3802	12124	…

इसके अलावा, समाधान n की संख्या बहुत तेजी से बढ़ती है, जिसका कारण ज्ञात नहीं है।

ऊपर दी गई तालिका n के लिए समाधानों की संख्या दिखाती है, जब $k = b!$, $b = 1, 2, \ldots, 11$ है।

2. फलन $f: N \to N$, के रूप में परिभाषित $f(b) = |A(b!)|$, रुचि का विषय है। सवाल यह है कि क्या यह फलन एक बढ़ता हुआ फलन है। यह भी देखा गया है कि $b = 4$ से 11 के लिए, $k = (b!-2)$ लेने से समीकरण अनसुलझा हो जाता है। सवाल यह है कि क्या यह गुण सभी $b \geq 4$ के लिए सही है।
3. किसी दिए गए k के लिए, यह संभव है कि m और $(m + 1)$ दोनों समीकरण $\phi(n) = k$ [9] के समाधान हों। सवाल यह है कि क्या ऐसे अनंत जोड़े हैं। यदि नहीं, तो m का सबसे बड़ा मान क्या है जिसके लिए $\phi(m) = \phi(m+1)$? ऐसे कितने जोड़े हैं? क्या ऐसे जोड़े के अस्तित्व का कोई पैटर्न है?

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically Sorted Terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिंदी शब्दावली
Carmichael Totient Function	कारमाइकल टोटिएंट फलन
Conjecture	अटकल
Euler- Phi Function	यूलर – फाई फलन
Inverse Euler- Phi Function	प्रतिलोम यूलर – फाई फलन
Number Theory	संख्या सिद्धांत
Prime Factorization	अभाज्य गुणनखंडन

संदर्भः

[1] Burton, David M. "Elementary Number Theory", Tata McGraw-Hill Education, 2006.
[2] Klee Jr., VL. "On a Conjecture of Carmichael", Bulletin of the American Mathematical Society, 53(12), 1947, pp. 1183–1186.
[3] Carmichael, R D. "A Table of the Values of m Corresponding to Given Values of ϕ(m)", American Journal of Mathematics, 30(4), 1908, pp. 394–400.
[4] Glaisher, James W Lee. "Number-Divisor Tables, Volume 8", Published for the Royal Society at the University Press, 1940.
[5] McCrary, Arthur Alfred. "The Inverse of Euler's Phi Function", American University, 1965.
[6] Carmichael, Robert Daniel. "On Euler's ϕ Function", Bulletin of the American Mathematical Society, 13(5), 1907, pp. 241–243.
[7] Wright, Harry Noble. "First Course in Theory of Numbers", J. Wiley Sons, 1951.
[8] Erdős, P. "Problem 4221: To Solve the Equation ϕ(n) = k! for Every $k \geq 1$", The American Mathematical Monthly, 53, 1946, p. 537.
[9] Kler, VL. "Some Remarks on Euler's Totient", The American Mathematical Monthly, 54(6), 1947, p. 332–332.