विस्तारित के के एल एकधा विधि द्वारा रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का हल

Solution of Linear Integer Fractional Programming Problem by Extended KKL Simplex Method

संजय जैन[1], आदर्श मंगल[2] एवं विजय राज सिंह शेखावत[3]

Sanjay Jain[1], Adarsh Mangal[2] & Vijay Raj Singh Shekhawat[3]

[1] S. P. C.Govt. College, Ajmer-305004

[2] Engineering College, Ajmer-305025

[3] Research Scholar, S. P. C. Govt. College, Ajmer-305004, INDIA

Email: drjainsanjay@gmail.com, dradarshmangal1@gmail.com, vjcstt@gmail.com

सारांश :

इस शोध पत्र में, रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिए एक नए उपगमन (Approach) को प्रस्तावित किया गया है जो कि पुनरावृत्त प्रक्रिया (Iterative procedure) पर आधारित है। प्रस्तावित विधि साहित्य में उपलब्ध अन्य विधियों, जैसे पारंपरिक एकधा विधि (Traditional Simplex Method) आदि की तुलना में अपेक्षाकृत अधिक दक्ष तथा समझने की दृष्टि से सरल है। के के एल एकधा विधि का नाम शोधकर्ताओं एन.डब्ल्यू. खोबरागड़े, पी.जी.खोट तथा एन.के. लाम्बा के उपनामों के प्रथम अक्षरों से मिलकर बनाया गया है जिन्होनें सर्वप्रथम इस विधि को रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं पर लागू किया था।

Abstract:

In this research paper, a new approach to find the Linear Integer Fractional Programming is suggested, which is based on the iterative procedure. The proposed method is more efficient and easy to understand as compared to the other methods available in the literature such as Traditional Simplex Method etc. The name of "KKL Simplex Method" is due to the first letters of the researcher's surnames i.e., N. W. Khobragade, P. G. Khot and N. K. Lamba who first applied this method on linear programming problems.

मुख्य शब्द: रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या, के के एल एकधा विधि, इष्टतम हल (Optimal **Solution**), पूर्णांक हल

Keywords: Linear fractional programming problem, KKL Simplex method, Optimal Solution, Integer Solution.

1. प्रस्तावना

एक भिन्नात्मक प्रोग्रामन निदर्श का उद्देश्य, अंश एवं हर में अऋणात्मक चरों (Non-negative variables) के साथ रैखिक फलनों के भिन्न रूप के उद्देश्य फलन को, दिए गए रैखिक व्यवरोधों (Linear constraints) के साथ इष्टतम करना होता है। भिन्नात्मक प्रोग्रामन आधुनिक व तीव्रगामी वृद्धि लिए हुए एक व्यावहारिक विषय है। भिन्नात्मक प्रोग्रामन का प्रयोग; संचार तंत्र (Communication System), सैन्य विज्ञान (Military Science),

प्रबंध (Management), उद्योग (Industries) तथा उत्पादन (Production) इत्यादि से जुडी हुई विविध समस्याओं में किया जाता है। कई शोधकर्ताओं ने रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्याओं को विभिन्न तकनीकों से हल किया है। पूर्व में चढ़ा (1), चार्नेस एवं अन्य (2), हिर्चे (3), जैन एवं अन्य (4, 5, 6, 7), स्वरुप (10) तथा टांक एवं अन्य (11) ने भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्याओं को हल किया तथा इनसे सम्बंधित पुनरावृत्त विधियाँ प्रस्तुत कीं। के के एल एकधा विधि साहित्य में उपलब्ध नवीनतम विधि है। खोबरागड़े एवं अन्य तथा जैन एवं अन्य ने ही अभी तक इस विधि का प्रयोग करते हुए विभिन्न प्रकार की गणितीय प्रोग्रामन समस्याओं को हल किया है तथा समस्याओं का इष्टतम हल प्राप्त किया है। इस प्रकार प्राप्त इष्टतम हल को साहित्य में उपलब्ध अन्य विधियों जैसे आलेखीय विधि, एकधा विधि, विभिन्न विलोपन विधियों से आसानी से प्रमाणित भी किया जा सकता है। खोबरागड़े एवं अन्य (8) ने रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का के के एल एकधा विधि से हल प्रस्तुत किया। खोबरागड़े एवं अन्य (9) ने खेल सिद्धांत से सम्बंधित समस्याओं को भी के के एल एकधा विधि से हल किया। इसके पश्चात जैन एवं मंगल (12) ने बहु–उद्देशीय रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का के के एल एकधा विधि से हल प्रस्तुत किया।

इस शोध पत्र में, रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को के के एल एकधा विधि द्वारा हल किये जाने की विवेचना किया जाना प्रस्तावित है। शोध पत्र का संगठन निम्नानुसार है : खंड 2 में रैखिक प्रोग्रामन समस्या को के के एल एकधा विधि से हल किये जाने से सम्बंधित व्याख्या दी गयी है। खंड 3 में रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को प्रस्तावित के के एल एकधा विधि से हल किये जाने से सम्बंधित विधि प्रस्तुत की गयी है। खंड 4 में प्रस्तावित के के एल एकधा विधि को समझाने के लिए एक दृष्टान्तीय उदाहरण प्रस्तुत किया गया है। अंत में खंड 5 में शोध पत्र का निष्कर्ष समाहित है।

2. रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए के के एल एकधा विधि

खोबरागडे एवं अन्य (8) तथा हमारे द्वारा किये गए संशोधनों के पश्चात किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या के इष्टतम हल को प्राप्त करने के निम्न चरण है :

1. सर्वप्रथम रैखिक प्रोग्रामन समस्या का गणितीय संरूपण (Mathematical Formulation) किया जाना चाहिए, यदि नहीं दिया गया हो।
2. रैखिक प्रोग्रामन समस्या का उद्देश्य फलन अधिकतमीकरण के रूप में होना चाहिए। यदि उद्देश्य फलन न्यूनतमीकरण के रूप में हो तो उसे (-1) से गुणा कर सर्वप्रथम अधिकतमीकरण में परिवर्तित करते है।
3. रैखिक प्रोग्रामन समस्या के व्यवरोधों के रूप में शामिल असमिकाओं के आवश्यकता पूरक सदिश अऋणात्मक होने चाहिए। यदि किसी असमिका में ऐसा नहीं हो तो, उस असमिका से सम्बंधित आवश्यकता पूरक सदिश के अवयव को धनात्मक बनाने के लिए (-1) से गुणा करते है।
4. मूल रैखिक प्रोग्रामन समस्या में सम्मिलित सभी असमिकाओं में आवश्यकता अनुसार न्यूनतापूरक अथवा आधिक्यपूरक चरों को शामिल करते हुए समीकरणों में परिवर्तित करते हैं।
5. दी गयी रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए प्रारंभिक के के एल सारणी निम्न प्रकार बनाते हैं :

पंक्ति (R)	आधारी चर	Z	y_1	.....	y_n	S_1	....	S_m	दक्षिण पक्ष
प्रारंभिक पंक्ति ($R*$)	Z	1	c_1	⋯	c_n	0	……	0	समस्यानुसार
प्रथम पंक्ति (R_1)	S_1	0	a_{11}	……	a_{1n}	1	……	0	b_1
द्वितीय पंक्ति (R_2)	S_2	0	a_{21}	……	a_{2n}	0	……	0	b_2
....	....	...	⋯	……	……	……	……	……	……
....	....	...	……	……	……	……	……	……	……
m वीं पंक्ति (R_m)	S_m	0	a_{m1}	……	a_{mn}	0	……	1	b_m

प्रारंभिक के के एल सारणी की व्याख्या निम्नानुसार है :

(i) उद्देश्य फलन (Objective function) में सम्मिलित चरों के गुणांकों को निरुपित करने वाली पंक्ति (R*), उद्देश्य पंक्ति कहलाती है।

(ii) R_1 से लेकर R_m तक की पंक्तियाँ, व्यवरोध पंक्तियाँ कहलाती हैं जिनमें व्यवरोधों में शामिल चरों के गुणांकों को लिखा जाता है।

(iii) उपरोक्त सारणी के स्तंभों की व्याख्या निम्नानुसार है :

(a) सारणी का प्रथम स्तम्भ उद्देश्य स्तम्भ कहलाता है।

(b) द्वितीय स्तम्भ (आधारी चर) में न्यूनतापूरक (Slack) एवं आधिक्यपूरक (Surplus) चरों को सम्मिलित किया गया है।

(c) सारणी का तीसरा स्तम्भ, उद्देश्य फलन (Z) में शामिल विविध चरों के गुणांकों को निरूपित करता है (जहाँ इस स्तम्भ का प्रथम अवयव 1 है तथा शेष सभी पंक्तियों के लिए यह 0 है।

(iv) व्यवरोधों में सम्मिलित निर्णायक चर अन–आधारी चरों के अंतर्गत निरूपित किए गए हैं।

(v) दी गई रैखिक प्रोग्रामन समस्या में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक (अथवा / और) कृत्रिम चरों (Artificial variables) के गुणांक, प्रारंभिक के के एल सारणी में इकाई आव्यूह बनाते हैं।

6. अब, इष्टमत्व परीक्षण (Optimality test) की जांच निम्नानुसार करते हैं :

(i) यदि प्रारंभिक पंक्ति का प्रत्येक अवयव धनात्मक हो तो वर्तमान हल इष्टतम है।

(ii) यदि ऐसा नहीं हो, तो इस हल को सुधार किये जाने की आवश्यकता है। हल के सुधार किये जाने के क्रम में Z के न्यूनतम ऋणात्मक गुणांक का चयन करते हैं। इस गुणांक के संगत स्तम्भ वाला सदिश अगली पुनरावृति के लिए प्रवेशी सदिश (Entering vector) होगा। माना y_r प्रवेशी सदिश है। अब y_r स्तम्भ में उच्चतम धनात्मक संख्या का चयन करते हैं। माना यह अवयव a_{rj} है, जो S_k स्तम्भ में स्थित है। अतः अगली पुनरावृति के लिए a_{rj} तथा S_k क्रमशः कीलक अवयव (Pivot element) एवं अपगामी सदिश (Departing vector) है।

(iii) इस प्रक्रिया की जब तक पुनरावृति करते हैं जब तक कि प्रारंभिक पंक्ति के सभी गुणांक धनात्मक नहीं हो जाएँ।

3. रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक समस्या के लिए के के एल एकधा विधि

किसी रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या के इष्टतम हल को प्राप्त करने के निम्न चरण हैं :

1. दी गई रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को दो रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में परिवर्तित करते हैं। रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या के अंश में शामिल रैखिक फलन को अधिकतम तथा हर में प्रयुक्त रैखिक फलन को न्यूनतम के रूप में लिखते हैं।
2. दोनों रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का उद्देश्य फलन अधिकतमीकरण के रूप में होना चाहिए। यदि उद्देश्य फलन न्यूनतमीकरण के रूप में हो तो उसे (–1) से गुणा कर सर्वप्रथम अधिकतमीकरण में परिवर्तित करते हैं।
3. रैखिक प्रोग्रामन समस्या के व्यवरोधों के रूप में शामिल असमिकाओं के आवश्यकता पूरक सदिश अऋणात्मक होने चाहिए। यदि किसी असमिका में ऐसा नहीं हो तो, उस असमिका से सम्बंधित आवश्यकता पूरक सदिश के अवयव को धनात्मक बनाने के लिए (–1) से गुणा करते हैं।
4. मूल रैखिक प्रोग्रामन समस्या में सम्मिलित सभी असमिकाओं में आवश्यकता अनुसार न्यूनतापूरक अथवा आधिक्यपूरक चरों को शामिल करते हुए समीकरणों में परिवर्तित करते हैं।
5. दोनों रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के लिए खंड 2 में वर्णन अनुसार अलग–अलग के के एल प्रारंभिक सारणी बनाते हैं।
6. प्रत्येक रैखिक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल के के एल एकधा विधि से प्राप्त करते हैं।
7. तत्पश्चात, किसी चर का भिन्नात्मक मान प्राप्त हो तो उसे विविध संयोजनों के द्वारा पूर्णांक मानों में परिवर्तित कर रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक समस्या का इष्टतम हल प्राप्त करते हैं।

प्रस्तावित प्रक्रिया को समझने के लिए अगले खंड में एक दृष्टान्तीय उदाहरण प्रस्तुत किया जा रहा है।

4. दृष्टान्तीय उदाहरण

निम्न रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या पर विचार करते हैं :

उपरोक्त समस्या को दो रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में निम्न प्रकार वियोजित किया जाता हैः

अधिकतम $Z = \frac{2x_1+2x_2}{4x_1+8x_2+4} = \frac{Z_1}{Z_2}$ (**माना**) $= \frac{N}{D}$(**माना**)

जहाँ N = Numerator (**अंश**) **व** D = Denominator (**हर**)

व्यवरोध $-2x_1 + x_2 \leq 3$

$4x_1 + 2x_2 \leq 8$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

(N) **अधिकतम** $Z = 2x_1 + 2x_2$

व्यवरोध $-2x_1 + x_2 \leq 3$

$4x_1 + 2x_2 \leq 8$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

(D) **न्यूनतम** $Z = 4x_1 + 8x_2 + 4$

व्यवरोध $-2x_1 + x_2 \leq 3$

$4x_1 + 2x_2 \leq 8$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

उपरोक्त समस्या (N) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर समस्या का परिवर्तित रूप निम्न होगा : अधिकतम

$$Z = 2x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$-2x_1 + x_2 + S_1 + 0S_2 = 3$$

$$4x_1 + 2x_2 + 0S_1 + S_2 = 8$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

प्रारंभिक के के एल सारणी

पंक्ति	आधारी चर	Z	y_1	y_2	S_1	S_2	दायाँ पक्ष
R_1	Z	1	-2	-2	0	0	0
R_2	S_1	0	-2	1	1	0	3
R_3	S_2	0	4	2	0	1	8

प्रारंभिक के के एल सारणी से स्पष्ट है कि Z का न्यूनतम ऋणात्मक गुणांक –2 है जो $\boldsymbol{y_1}$ व y_2 स्तंभों के संगत है। स्वेच्छतः $\boldsymbol{y_1}$ स्तम्भ का चयन प्रवेशी सदिश के रूप में करते हैं। अब $\boldsymbol{y_1}$ स्तंभ के उच्चतम धनात्मक अवयव 4 का चयन करते हैं जो कि $\boldsymbol{S_2}$ के संगत है अतः $\boldsymbol{S_2}$ अपगामी सदिश है तथा 4 कीलक अवयव है।

सारणी 2

पंक्ति	आधारी चर	Z	y_1	y_2	S_1	S_2	दायाँ पक्ष
R_1	Z	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	4
R_2	S_1	0	0	2	1	$\frac{1}{2}$	7
R_3	y_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	2

पुनः सारणी 2 से स्पष्ट है कि Z का न्यूनतम ऋणात्मक गुणांक –1 है जो $\boldsymbol{y_2}$ स्तंभ के संगत है। अतः $\boldsymbol{y_2}$ स्तम्भ का चयन प्रवेशी सदिश के रूप में करते है। अब $\boldsymbol{y_2}$ स्तंभ के उच्चतम धनात्मक अवयव 2 का चयन करते हैं जो कि $\boldsymbol{S_1}$ के संगत है। अतः $\boldsymbol{S_1}$ अपगामी सदिश है तथा 2 कीलक अवयव है।

सारणी 3

पंक्ति	आधारी चर	Z	y_1	y_2	S_1	S_2	दायाँ पक्ष
R_1	Z	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$
R_2	y_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
R_3	y_1	0	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

सारणी 3 से स्पष्ट है कि प्रारंभिक पंक्ति के सभी गुणांक धनात्मक हैं। अतः यह हल इष्टतम है। अतः समस्या (N) का इष्टतम हल $\boldsymbol{x_1} = 1/4$, $\boldsymbol{x_2} = 7/2$ तथा $Z-1 = 15/2$

समस्या (D) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर प्रारंभिक के के एल सारणी निम्न अनुसार होगी :

प्रारंभिक के के एल सारणी

पंक्ति	आधारी चर	Z	y_1	y_2	S_1	S_2	दायाँ पक्ष
R_1	Z	1	-4	-8	0	0	4
R_2	S_1	0	-2	1	1	0	3
R_3	S_2	0	4	2	0	1	8

प्रारंभिक के के एल सारणी से स्पष्ट है कि Z का न्यूनतम ऋणात्मक गुणांक –4 है जो $\boldsymbol{y_1}$ स्तंभ के संगत है। अतः $\boldsymbol{y_1}$ स्तम्भ का चयन प्रवेशी सदिश के रूप में करते हैं। अब $\boldsymbol{y_1}$ स्तंभ के उच्चतम धनात्मक अवयव 4 का चयन करते हैं जो कि $\boldsymbol{S_2}$ के संगत है। अतः $\boldsymbol{S_2}$ अपगामी सदिश है तथा 4 कीलक अवयव है।

सारणी 2

पंक्ति	आधारी चर	Z	y_1	y_2	S_1	S_2	दायाँ पक्ष
R_1	Z	1	0	-6	0	1	12
R_2	S_1	0	0	2	1	$\frac{1}{2}$	7
R_3	y_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	2

पुनः सारणी 2 से स्पष्ट है कि Z का न्यूनतम ऋणात्मक गुणांक –6 है जो y_2 स्तंभ के संगत है। अतः y_2 स्तम्भ का चयन प्रवेशी सदिश के रूप में करते हैं। अब y_2 स्तंभ के उच्चतम धनात्मक अवयव 2 का चयन करते हैं जो कि S_1 के संगत है। अतः S_1 अपगामी सदिश है तथा 2 कीलक अवयव है।

सारणी 3

पंक्ति	आधारी चर	Z	y_1	y_2	S_1	S_2	दायाँ पक्ष
R_1	Z	1	0	0	3	5	33
R_2	y_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
R_3	y_1	0	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

सारणी 3 से स्पष्ट है कि प्रारंभिक पंक्ति के सभी गुणांक धनात्मक हैं। अतः यह हल इष्टतम है। अतः समस्या (D) का इष्टतम हल $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{7}{2}$ तथा $Z_2 = 33$

अतः दी गई रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{7}{2} \text{ तथा } Z = \frac{\frac{15}{2}}{33} = \frac{15}{66}$$

जिसे साहित्य में उपलब्ध विविध विधियों से आसानी से सत्यापित किया जा सकता है।

किन्तु यहाँ हमें चरों x_1 व x_2 के पूर्णांक हल ज्ञात करने हैं, जहाँ $0 \le x_1 \le 1$ व

$3 \le x_2 \le 4$ अतः विविध संयोजनों से पूर्णांक हल निकालने का प्रयास करते हैं :

(1) $x_1=0, x_2=3$ सुसंगत हल

(2) $x_1=0, x_2=4$ सुसंगत हल नहीं

(3) $x_1=1, x_2=3$ सुसंगत हल नहीं

(4) $x_1=1, x_2=4$ सुसंगत हल नहीं

अतः दी गई रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम पूर्णांक हल :

$x_1=0, x_2=3$ तथा अधिकतम $Z = \frac{3}{14}$

5. निष्कर्ष

इस शोध पत्र में रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या से दो रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं की अभिकल्पना कर के के एल एकधा विधि का उपयोग कर इष्टतम हल प्राप्त किया गया है। रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या के लिए मानक एकधा विधि की तुलना में अपेक्षाकृत कम अथवा बराबर संख्या की पुनरावृत्तियों में के के एल एकधा विधि द्वारा इष्टतम हल प्राप्त किया जा सकता है। इसके साथ ही, के के एल एकधा विधि समझने की दृष्टि से सरल तथा अधिक यथार्थ है। प्रस्तावित विधि गोमोरी कटिंग प्लेन तथा ब्रांच एंड बाउंड विधि की तुलना में किसी रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल ज्ञात करने में अधिक सशक्त है। गोमोरी कटिंग प्लेन विधि में प्रत्येक पुनरावृति में एक भिन्नात्मक व्यवरोध (Fractional constraint) जोड़ा जाता है तथा एकधा विधि का प्रयोग किया जाता है जोकि विधि को और अधिक कठिन बनाता है। ब्रांच एंड बाउंड विधि में प्रत्येक पुनरावृति में शाखन प्रक्रम का उपयोग करते हैं जब कि प्रस्तावित विधि में केवल एक ही पुनरावृति में परिबंध (Bound) की अवधारणा का प्रयोग किया गया है।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेज़ी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिंदी शब्दावली
Artificial Variable	कृत्रिम चर
Bound	परिबंध
Departing Vector	अपगामी चर
Entering Vector	प्रवेशी चर
Fractional Constraint	भिन्नात्मक व्यवरोध
Iterative Procedure	पुनरावृत्त प्रक्रिया
Linear Constraint	रैखिक व्यवरोध
Linear Integer Fractional Programming	रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन
Non-negative Variable	ऋणात्मक चर
Objective Function	उद्देश्य फलन
Optimality Test	इष्टमत्व परीक्षण
Optimal Solution	इष्टतम हल
Pivot Element	कीलक अवयव
Simplex Method	एकधा विधि
Slack Variable	न्यूनतापूरक चर
Surplus Variable	आधिक्यपूरक चर

6. सन्दर्भ

(1) Chadha, S. S. (1999) : A Linear Fractional Program with homogeneous Constraints, OPSEARCH,36, pp. 390-398.

(2) Charnes, A. and Cooper, W.W. (1962) : Programming with linear fractional functionals, Naval Research Log. Quart., 9 pp. 181-186.

(3) Hirche, J. (1996) : A note on programming problems with linear-plus linear fractional objective functions, European Journal of Operations Research, 89, pp. 212-214.

(4) Jain, S. and Mangal, A. (2004) : Modified Fourier elimination technique for fractional programming problem, Acharya Nagarjuna International Journal of Mathematics and Information Technology, 1, pp. 121-131.

(5) Jain, S. and Mangal, A. (2008) : Extended Modified Fourier Elimination Technique for Integer Solution of Fractional Programming Problem, Varahmihir Journal of Mathematical Sciences, Vol.8, No. 1, pp. 179-186.

(6) Jain, S. and Mangal, A. (2008): Gauss Elimination Technique for Fractional Programming Problem, J. Indian Soc. Stat. Opers. Res., Vol. XXIX, No. 1-4, pp. 35-40.

(7) Jain, S. and Mangal, A. (2008) : Extended Gauss Elimination Technique for Integer Solution of Linear Fractional Programming, Journal of the Indian Math. Soc., Vol. 75, Nos. 1-4, pp. 37-46.

(8) Khobragade, N.W., Lamba, N.K. and Khot, P.G. (2013) : Solution of linear programming problem by KKL method, International Journal of Engineering and Innovative Technology, Vol. 3 Issue 4, pp. 334-340.

(9) Khobragade, N.W., Lamba, N.K. and Khot, P. G. (2013) : Solution of Game Theory Problems by KKL Method, International Journal of Engineering and Innovative Technology, Vol.3, Issue 4,pp. 350-355.

(10) Swarup, K. (1965) : Linear Fractional Functionals Programming, Operations Research, 13, pp. 1029-1036.

(11) Tak,P.K., Shekhar, G., Jain,S. and Mangal, A. (2021) : Solution of Linear Fractional Programming Problem by Fourier-Motzkin Elimination Technique, Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, Vol. 12, No.14, 621-625.

(12) Jain, S. and Mangal, A. (2021) : KKL Simplex Algorithm for Multi-Objective Linear Programming Problem , Journal of Xidian University, Vol.15, Issue 6, pp. 358-363.