शोध आलेख / Research Article

रैखिक भिन्नात्मक निदर्श में अनावश्यक व्यवरोधों को निगमित करने का एक स्वानुभविक उपगमन

A HEURISTIC APPROACH TO DEDUCT THE REDUNDANT CONSTRAINTS IN FRACTIONAL PROGRAMMING MODEL

एम. एल. अग्रवाल[1], संजय जैन[2], आदर्श मंगल[3] एवं विजय राज सिंह शेखावत[4]
[1, 2] सम्राट पृथ्वीराज चौहान राजकीय महाविद्यालय,अजमेर
[3] अभियांत्रिकी महाविद्यालय,अजमेर
[4] वैज्ञानिक एवं तकनीकी शब्दावली आयोग, मानव शिक्षा मंत्रालय, भारत सरकार

[1] mlagarwal27@gmail.com, [2] drjainsanjay@gmail.com ,
[3] dradarshmangal1@gmail.com, [4] vjcstt@gmail.com

सारांश :

रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या (Linear Fractional Programming Problem), संक्रिया विज्ञान में; संसाधनों को नियत करने तथा व्यावहारिक इष्टतम समस्याओं को हल करने के लिए एक अति महत्वपूर्ण प्रविधि है । तंत्र विश्लेषकों अथवा विभिन्न शोधार्थियों के द्वारा विशेषतः जब वृहद् रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन निदर्शों को आकार दिया जाता है, तब कुछ अनावश्यक व्यवरोधों (Redundant Constraints) की उस निदर्श में सम्मिलित होने की संभावना रहती है । इन अनावश्यक व्यवरोधों के कारण निदर्श के हल किये जाने की दक्षता एवं समय दोनों प्रभावित होते है ।

यह शोध पत्र, किसी रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या में अनावश्यक व्यवरोधों को चिन्हित करने के लिए एक साधारण स्वानुभविक एल्गोरिथ्म (Heuristic Algorithm) प्रस्तावित करता है जिससे दी गयी समस्या की विमाओं /व्यवरोधों को कम किया जा सके ।

मुख्य शब्द : रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन, अनावश्यक व्यवरोध, प्रवणता आव्यूह, निदर्श समानयन ।

ABSTRACT :

In the field of Operations Research, Linear Fractional Programming Problem is one of the most important technique to allocate resources and to solve practical optimization problems. When system analysts and different researchers deal specially with large-scale linear fractional programming models, there may be some possibility to include some redundant constraints in the problem. Due to these redundant constraints, the model will waste computation effort.

This research paper proposes a simple heuristic approach to identify the redundant constraints in any linear fractional programming problem, from which the dimensions / constraints may be reduced.

Keywords: Linear fractional programming, redundant constraints, gradient matrix, model reduction.

परिचय

किसी रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन निदर्श का संरूपण (Formulation) करते समय, तंत्र विश्लेषक एवं विभिन्न शोधार्थी सभी संभव व्यवरोधों को सम्मिलित करने का प्रयास करते है ताकि समस्या का अनुकूल परिणाम प्राप्त किया जा सके यद्यपि उनमें से कुछ व्यवरोध दी गयी समस्या के इष्टतम हल (Optimal Solution) पर बंधक व्यवरोध (Binding Constraint) हो । उपरोक्त व्यवरोधों में अनावश्यक व्यवरोधों के भी विद्यमान होने की संभावना होती है । इन अनावश्यक व्यवरोधों की उपस्थिति से समस्या की अभिकलन क्षमता एवं समय दोनों प्रभावित होते है । यदि मूल समस्या से इन अनावश्यक व्यवरोधों को चिन्हित कर लोप कर दिया जाये तो इष्टतम हल तक पहुँचने में पुनरावृत्तियों की संख्या को बहुत सीमा तक कम किया जा सकता है । किसी समस्या से अनावश्यक व्यवरोधों का लोप करने की इस प्रक्रिया को निदर्श समानयन (Model Reduction) कहते है ।

स्वानुभविक प्रविधि (Heuristic Technique) :

स्वानुभविक प्रविधि को बहुधा साधारणतया स्वानुभविक भी कहा जाता है । यह किसी समस्या के अधिगम, हल करने अथवा खोज करने की एक व्यवहारिक विधि है जोकि समस्या के इष्टतम (उद्देश्य फलनानुसार अधिकतम अथवा न्यूनतम) अथवा यथार्थ होने की जमानत नहीं देती है किन्तु आसन्न लक्ष्यों को प्राप्त करने के लिए पर्याप्त होती हो ।

अनावश्यक व्यवरोध (Redundant Constraint) :

एक ऐसा व्यवरोध जिसको सुसंगत हलों के समुच्चय को परिवर्तित किये बिना निकाय में से हटाया जा सके,अनावश्यक व्यवरोध कहलाता है । अनावश्यक व्यवरोधों से अभिप्राय ऐसे अवरोधों से लिया जाता है जिनका समावेशन किसी गणितीय प्रोग्रामन समस्या के सुसंगत हल के लिए आवश्यक नहीं होता है । अन्य शब्दों में, कोई एक व्यवरोध दूसरे व्यवरोधों की तुलना में अधिक बंधक व्यवरोध हो और इसी कारण से इस व्यवरोध को नजर–अंदाज किया जाता हो, अनावश्यक व्यवरोध कहलाता है ।

उदाहरणार्थ : किसी रैखिक प्रोग्रामन समस्या पर विचार करते है :–

अधिकतम कीजिये $Z = 3x_1 + 5x_2$

व्यवरोध $2x_1 + 3x_2 \leq 24$

$x_1 \leq 9$

$x_2 \leq 6$ ....(1)

$x_1 \leq 5$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

इस रैखिक प्रोग्रामन समस्या (1) में व्यवरोध $x_1 \leq 5$ की उपस्थिति से व्यवरोध $x_1 \leq 9$ की सार्थकता नहीं रह जाती है क्योंकि निर्णायक चर x_1 का कोई मान यदि 5 से छोटा होगा तो निश्चित रूप से वह 9 से छोटा ही होगा । अतः इस दी गयी रैखिक प्रोग्रामन समस्या में व्यवरोध $x_1 \leq 9$ एक अनावश्यक व्यवरोध है क्योंकि यह दी गयी समस्या के सुसंगत हल पर कोई प्रभाव नहीं ड़ालता है ।

इस शोध पत्र में व्यवरोधों की प्रवणता आव्यूह (Gradient Matrix) से स्वानुभविक उपगमन का प्रयोग कर अनावश्यक व्यवरोध को चिन्हित कर लोप करने का प्रयास किया गया है । पूर्व में विभिन्न शोधकर्ताओं यथा मत्थेइस्स[1] (1973), ब्रेअर्ले एवं अन्य[2] (1975), तेल्गन[3] (1983), कारवाँ एवं अन्य[4] (1983), अर्नों बोनेह एवं अन्य[5] (1993), स्तोज्कोविक एवं अन्य[6] (2001), इओस्लोविच[7] (2002), संजय जैन एवं अन्य[8] (2003), पौलराज एवं अन्य[9] (2006) ने गणितीय प्रोग्रामन (Mathematical Programming), रैखिक प्रोग्रामन (Linear Programming), रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन में समघात व्यवरोधों (Homogeneous Constraints) की एल्गोरिथ्म तथा रैखिक निकाय (Linear System) के क्षेत्र में उल्लेखनीय अनुसन्धान किया । इसके पश्चात् अरविन्द बाबू एवं अन्य[10] (2011) ने रैखिक प्रोग्रामन निदर्श में अनावश्यक व्यवरोधों का लोप करने के लिए

स्वानुभविक उपगमन का प्रयोग किया । याहिया[11] (2012) ने वैकल्पिक सुसंगत (Alternate Feasible) अथवा असुसंगत प्रारम्भिक हल बिन्दुओं वाली रैखिक पूर्णांक प्रोग्रामन समस्याओं (Linear Integer Programming Problems) को हल करने के लिए स्वानुभविक उपगमन का अध्ययन किया । सुमाथि[12] (2016) ने अन्तःखंडित मानों (Intercepted values) के साथ रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने की विधि का विकास किया । यान- क्सिन क्सू[13] (2016) ने जहाज निर्माण के कारखाने में कटिंग स्टॉक समस्या के लिए एक दक्ष स्वानुभविक उपगमन का उपयोग किया । इगबल एवं अन्य[14] (2017) ने द्विभाजन एल्गोरिथ्म पर आधारित स्वानुभविक विधि का प्रयोग कर रैखिक त्रि-स्तरीय प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने का विवेचन किया । एस्टीनिनगसिह एवं अन्य[15] (2018) ने अनावश्यक व्यवरोधों को पहचानने के लिए लेवेलीन- नियमों तथा स्वानुभविक विधि का तुलनात्मक विवेचन किया । यइक्सिन जहाओ एवं अन्य[16] (2020) ने पूर्णांक प्रोगामन के स्तम्भ जनित सिद्धांत के लिए स्वानुभविक खोज विधियों का अध्ययन किया ।

अनावश्यक व्यवरोधों का लोप करने के लिए एल्गोरिथ्म

m व्यवरोधों तथा n चरों वाली एक रैखिक भिन्नात्मक समस्या पर विचार करते है ।

निम्नतम कीजिये $Z = (f(X))/(g(X))$

व्यवरोध $A X = 0$, ... (2)

$1 X = 1$,

$X \geq 0$

जहाँ f(X) तथा g(X) दोनों रैखिक अर्थात् एकघाती फलन (Linear Function) है ।

चरण 1 : रैखिक भिन्नात्मक समस्या (2) में दिए गए व्यवरोधों $A X = 0$, $1 X = 1$ तथा $X \geq 0$ में से $1 X = 1$ को बंधक व्यवरोध अंकित करते है ।

चरण 2 : चरण 1 में अंकित बंधक व्यवरोध $1 X = 1$ को हटाते हुए शेष व्यवरोधों $A X = 0$ तथा $X \geq 0$ की सहायता से एक प्रवणता आव्यूह $c_{ij} = A^T$ बनाते है ।

चरण 3 : प्रवणता आव्यूह $c_{ij} = A^T$ की प्रत्येक पंक्ति के महत्तम अवयव (Greatest Element) को चिन्हित करते है ।

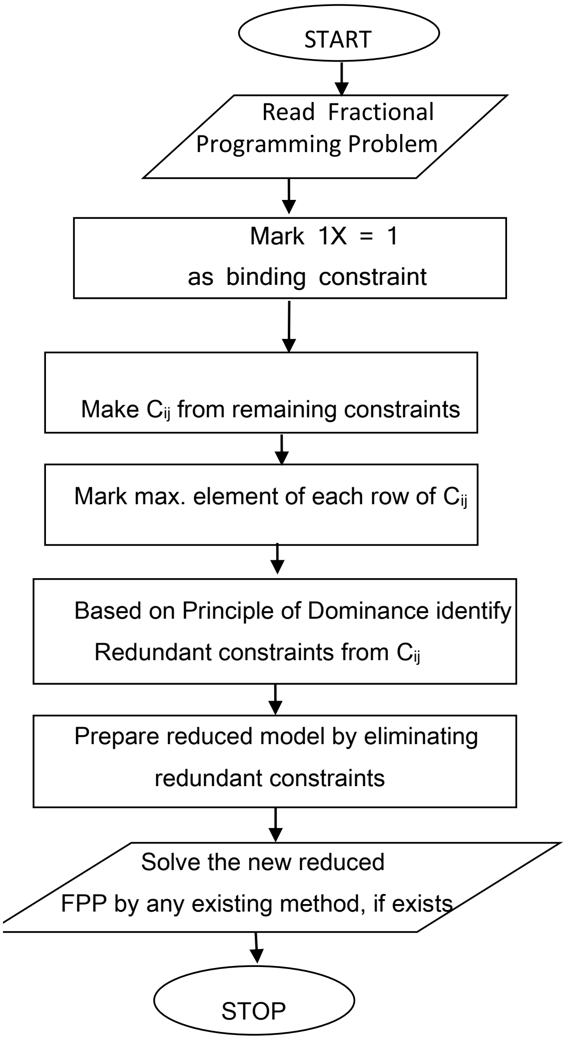
चरण 4 : प्रवणता आव्यूह $c_{ij} = A^T$ की प्रत्येक पंक्ति के महत्तम अवयव के अतिरिक्त शेष अवयवों से सम्बंधित व्यवरोधों को प्रमुखता सिद्धांत (Principle of Dominance) के आधार पर अनावश्यक माना जाता है ।

चरण 5 : इन अनावश्यक व्यवरोधों का मूल समस्या से अनंतिम रूप से लोप कर एक अन्य निदर्श में समानीत किया जाता है ।

चरण 6 : इन अनावश्यक व्यवरोधों का लोप कर दिए जाने से मूल समस्या का आकार पूर्व की अपेक्षा लघु हो जाता है । जिससे अभिकलन किये जाने का समय तथा दक्षता दोनों पर प्रभाव पड़ता है ।

चरण 7 : इस प्रकार अन्य निदर्श में समानीत समस्या का हल आलेखीय विधि (Graphical method) (दो निर्णायक चरों की अवस्था में) अथवा एकधा प्रविधि (Simplex technique) या अन्य किसी प्रचलित विधि से ज्ञात किया जा सकता है यदि समस्या के हल का अस्तित्व (Existence) हो ।

Flow Chart



दृष्टान्तीय उदाहरण

एक रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या

निम्नतम कीजिये

$$Z = (2x_1 + 2x_2)/(x_1+x_2+1)$$

व्यवरोध $x_1+3x_2=0$

$$2x_1+x_2=0$$
$$9x_1+8x_2=0 \quad ....(3.1)$$
$$3x_1+5x_2=0$$
$$x_1+x_2=1$$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या (3.1) में व्यवरोध $x_1 + x_2=1$ को बंधक व्यवरोध अंकित करते है ।

प्रवणता आव्यूह

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

प्रवणता आव्यूह A^T की प्रथम एवं द्वितीय पंक्ति के महत्तम अवयव क्रमशः 9 तथा 8 है । समस्या का अभिकलन किये जाने के लिए इन अवयवों के अतिरिक्त शेष अवयवों से निर्मित व्यवरोधों $x_1 + 3x_2 =0$, $2x_1 + x_2= 0$ एवं $3x_1 + 5x_2= 0$ को समस्या के लिए अनावश्यक व्यवरोध मानते हुए लोप करते है ।

अतः दी गयी भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का समानीत निदर्श निम्न प्रकार होगा-

निम्नतम कीजिये

$$Z = (2x_1 + 2x_2)/(x_1 + x_2 +1)$$

व्यवरोध $9x_1 + 8x_2 = 0$ ------- (3.2)

$$x_1 + x_2 = 1$$

तथा $x_1, x_2 \geq 0.$

भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या के समानीत निदर्श (3.2) का हल (यदि अस्तित्व हो), साहित्य में उपलब्ध आलेखीय विधि, एकधा प्रविधि या अन्य किसी विधि से ज्ञात किया जा सकता है ।

परिणाम तथा विवेचना

प्रस्तावित एल्गोरिथ्म वर्तमान में साहित्य में उपलब्ध दूसरी तकनीकों अथवा विधियों से श्रेष्ठ है क्योंकि यह एल्गोरिथ्म बहुत कम समय में प्रमुखता सिद्धांत के आधार पर अनावश्यक व्यवरोधों को चिन्हित कर निदर्श का समानयन करती है । एकधा प्रविधि अथवा आलेखीय विधि से अनावश्यक व्यवरोधों को संसूचित किए बिना समस्या को हल करने पर समय

तथा श्रम का अपव्ययय होता है । परिचय में विवेचित उदाहरण में यदि अनावश्यक व्यवरोधों को संसूचित किए बिना समस्या को आलेखीय विधि से हल किया जाए तो सभी व्यवरोधों को आलेखित करते हुए अनावश्यक व्यवरोधों का पता लगाया जाता है जिससे समय, श्रम तथा मुद्रा तीनों का अपव्यय होता है । साथ ही यदि एकधा प्रविधि से समस्या को हल किया जाए तो समस्या को हल करने में कई एकधा सारणियाँ (कृत्रिम चरों को सम्मिलित करते हुए, यदि आवश्यक हो तो) बनानी पड़ती है जिससे समस्या जटिल हो जाती है तथा समस्या को हल करने में बहुत समय लगता है ।

निष्कर्ष एवं भविष्य में अनुसन्धान के लिए संभावनाएं

वृहद् स्तर की दैनिक जीवन की समस्याओं पर इस उपगमन का प्रयोग कर प्रस्तावित एल्गोरिथ्म की दक्षता का मूल्यांकन किया जा सकता है । यह एल्गोरिथ्म कम समय में इष्टतम हल देती है । इस शोध पत्र में किसी दी गयी रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या में विद्यमान अनावश्यक व्यवरोधों को संसूचित करने के लिए एक साधारण स्वानुभविक उपगमन का विकास किया गया है । इस विषय में भविष्य में अनुसन्धान किये जाने की अपार संभावनाएं है । यदि समस्या में विद्यमान प्राचलों (Parameters) में कुछ परिवर्तन कर दिए जाये तो प्रबंधन (Management) में तदनुसार प्रबंधकीय निर्णय (Managerial Decisions) लिए जा सकते है ।

निकट भविष्य में लेखकों के द्वारा इसे रैखिक एवं रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्याओं के योग रूप (Linear Plus Linear Fractional Programming Problems) आदि के लिए विस्तार प्रस्तावित है ।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक तकनीकी हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुसार शाटित हिंदी शब्दावली
Alternate Feasible	वैकल्पिक सुसंगत
Binding Constraint	बंधक व्यवरोध
Existence	अस्तित्व
Formulation	संरूपण
Gradient Matrix	प्रवणता आव्यूह
Graphical Method	आलेखीय विधि
Greatest Element	महत्तम अवयव
Heuristic Algorithm	स्वानुभविक एलगोरिथ्म
Homogeneous Constraints	समघात व्यवरोध
Intercepted Values	अन्तःखंडित मान
Karmarkar's Algorithm	करमारकर– एलगोरिथ्म
Linear Fractional Programming Problem	रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या
Linear Function	रैखिक फलन
Linear Integer Programming Problems	रैखिक पूर्णांक प्रोगामन समस्या
Linear Plus Linear Fractional Programming Problems	रैखिक धन रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या
Linear Programming	रैखिक प्रोग्रामन
Linear System	रैखिक निकाय
Management	प्रबंध
Managerial Decisions	प्रबंधकीय निर्णय
Mathematical Programming	गणितीय प्रोग्रामन
Model Reduction	निदर्श समानयन

Optimal Solution	इष्टतम हल
Parameters	प्राचल
Principle of Dominance	प्रमुखता सिद्धांत
Redundant Constraints	अनावश्यक व्यवरोध
Simplex technique	एकधा प्रविधि

सन्दर्भ

1. Mattheiss, T.H. (1973): An algorithm for determining irrelevant constraints and all vertices in systems of linear inequalities. Operations Research, 21, 247-260.
2. Brearley, A.L., Mitra, G. and Williams, H.P. (1975): Analysis of mathematical programming problem prior to applying the simplex algorithm. Mathematical Programming, 54-83.
3. Telgan, J. (1983): Identifying redundant constraints and implicit equalities in system of linear constraints. Management Science, 29, 1209-1222.
4. Karwan, M.H., Loffi, V., Telgan, J. and Zionts, S. (1983): Redundancy in Mathematical Programming : A State of the Art Survey (Berlin : Springer-Verlag).
5. Arnon Boneh et al (1993): Constraint classification in Mathematical Programming. Mathematical Programming, Vol. 61, pp. 61-73.
6. Stojkovic, N.V. and Stanimirovic, P.S. (2001): Two direct methods in linear programming. European Journal of Operational Research, 131, 417-439.
7. Ioslovich, I. (2002) : Robust reduction of a class of large scale linear programs. SIAM journal on Optimization, 12, 262-282.
8. Sanjay Jain &Adarsh Mangal, (2003): Algorithm for fractional programming problem with homogeneous constraints. Ganita Sandesh, Vol. 17 (2), pp. 55-60.
9. Paulraj, C., Chellappan, C. and Natesan, T.R. (2006): A heuristic approach for identification of redundant constraints in linear programming models. International Journal of Computer and Mathematics, 83:8, 675-683.
10. Arvind Babu, L.R. and Palaniappan,B. (2011) : A heuristic approach to deduct the redundant constraints in linear programming model. The Mathematics Education, Vol. XLV , No. 2 , pp. 66-70.
11. Yahia Zare Mehrjerdi, (2012): A heuristic approach for solving lip with the optional feasible or infeasible initial solution points. International Journal of Industrial Engineering & Production Research, Volume 23, no. 1, pp. 23-33.
12. Sumathi, P. (2016) : A new approach to solve linear programming with intercept values. Journal of Information and Optimization Sciences, Volume 37, Issue 4.
13. Yan-xin Xu (2016) : An Efficient Heuristic Approach for Irregular Cutting Stock Problem in Ship Building Industry. Mathematical Problems in Engineering, Volume 2016, 1-13.
14. Eghbal Hosseini (2017) : Solving linear tri-level programming problem using heuristic method based on bi-section algorithm. Asian J. Sci. Res., 10: 227-235.
15. Y Estiningsih, Farikhin and R H Tjahjana (2018) : A comparison of Heuristic method and Llewellyn rules for identification of redundant constraints. IOP Conf. Series : Journal of Physics: Conf. Series 983 (2018) 012083. doi: 10.1088/1742-6596/983/1/012083.
16. Yixin Zhao, Torbjorn Larsson and Elina Ronnberg (2020) : An integer programming column generation principle for heuristic search methods. International Transactions in Operations Research, 27 pp. 665-695.