गणित में अनन्त की अवधारणा
Concedpt of Infinity in Mathematics

राम शरण दास
Ram Sharan Dass
IV/49, वैशाली, गाजियाबाद - 201010
rsgupta_248@yahpp.co.in

सारांश

गणित में अनन्त की अवधारणा अत्यन्त विशिष्ट और अनन्य है। न यह कोई संख्या हे न अंक फिर भी किसी भी प्रकार का चिंतन प्रतिमान इसके बिना अधूरा है। यह एक रहस्यमयी अवधारणा रही हे। अनन्त के गणितीय चिन्तन को स्पष्टता के साथ ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य में प्रस्तुत किया गया है। कुछ उदाहरणों के द्वारा यह समझाने का प्रयास भी किया गया है कि व्यवहारिक स्थितियों में इसका उपयोग कैसे किया जाता है।

ABSTRACT

The concept of mathematics has a very special and unique position in mathematics. It is neither a number nor a digit even then no thinking paradigm is complete without it. It has remained a mysterious historical perspective. How this concept is used in practical situations is also explained with the help of some examples.

अनन्त अर्थात् एक ऐसा सत्व जिसका कोई अन्त न हो, छोर न हो, पूर्णता न हो, समापन न हो युगों से चिंतकों को अपनी ओर आकर्षित करता रहा है। चिन्तन का विषय कुछ भी हो, परन्तु उस विषय में अनन्त के अस्तित्व की अवधारणा की आवश्यकता अनिवार्य लगती है। गणित में अनेक संदर्भो में अनन्त की अवधारणा उभरती है, जैसे- किसी रेखा पर ज्योमितीय बिन्दुओं की कुल संख्या अनन्त होती है आदि-आदि।

भास्कराचार्य ने शून्य और अनन्त के रिश्ते की बात की है और अनन्त को 'ष' हर अर्थात् एक ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया है जो किसी भी संख्या को शून्य से विभाजित करने पर प्राप्त होती है। अन्य अंको की तरह अनन्त के लिए भी एक प्रतीक निर्धारित है: यह अंग्रेजी के अंक आठ के प्रतीक (8) को क्षैतिजत: लिटाने से प्राप्त होता है: ∞। यह प्रतीक 1655 में जोहन वालिस द्वारा पहले पहल सुझाया गया था। भास्कराचार्य की परिभाषा को अब आप इस प्रकार लिख सकते हैं कि $\frac{x}{0} = \infty$ जहाँ x शून्य के अतिरिक्त कोई वास्तविक संख्या है।

क्या है अनन्त?

अनन्त एक रहस्यमयी संख्या है। इसका अस्तित्व केवल एक विचार के रूप में है। बड़ी से बड़ी संख्या को भी आप अनन्त नहीं कह सकते। न ब्रह्माण्ड के तारों की संख्या को अनन्त कहा जा सकता है और न ब्रह्माण्ड में कणों की संख्या को। किसी भी वास्तविक संख्या को अनन्त नहीं कहा जा सकता। $+\infty$ बड़ी से बड़ी वास्तविक संख्या से बड़ा है और $-\infty$ छोटी से

छोटी वास्तविक संख्या से छोटा है। यह जटिल नहीं है, सरल है, परन्तु इसका कोई कल्पना चित्र नहीं बनाया जा सकता है। अलग-अलग संदर्भ में इसका अलग अर्थ हो सकता है।

अनन्त के गुण

अनन्त कोई भौतिक रूप की संख्या नहीं है, यह एक संकल्पना है। गणित में जब इसे संख्या के रूप में उपयोग में लाया जाता है तो यह ऐसा गणितीय मान होता है जो एक सीमा की ओर बढ़ने पर प्राप्त हो सकता है अर्थात् जब a का मान शून्य के करीब बढ़ रहा हो तो x को a से विभाजित करने पर प्राप्त मान अनन्त के करीब बढ़ता जाता है। अर्थात्, जब $a \to 0$ तो $\frac{x}{a} \to \infty$

अनन्त के साथ विभिन्न गणितीय संक्रियाएं

1. अनन्त में कोई भी वास्तविक संख्या जोड़ने या घटाने से प्राप्त फल अनन्त ही होता है। यहाँ तक कि अनन्त को अनन्त में जोड़ने से भी योगफल अनन्त ही होता है तथापि अनन्त में से अनन्त को घटाने से शेषफल एक अपरिमित संख्या होती है। इस गुण का एक निहितार्थ यह भी है कि अनन्त का अंश पूर्ण के बराबर हो सकता है। परन्तु दो अनन्त एक दूसरे के बराबर नहीं भी हो सकते हैं।

अनन्त के साथ गणितीय संक्रियाए
$\infty + x = \infty$
$\infty - x = \infty$
$\infty + \infty = \infty$
$\infty - \infty =$ अपरिमेय संख्या
$\infty \times x = \infty, x \neq 0$
$\frac{\infty}{x} = \infty, x \neq 0$
$\infty \times \infty = \infty$
$\frac{\infty}{\infty} =$ परिमित संख्या

2. अनन्त में किसी भी प्राकृतिक संख्या द्वारा गुणा या भाग करने पर प्राप्त फल अनन्त होता है, अनन्त को अनन्त से गुणा करने पर गुणनफल अनन्त होता है परन्तु अनन्त को अनन्त से भाग करने पर भागफल अपरिमित होता है।

$\frac{x}{\infty} = 0$ तथा $\frac{x}{0} = \infty$

यहाँ तक कि $\frac{0}{\infty} = 0$ तथा $\frac{\infty}{0} = \infty$

3. शून्य के साथ अनन्त का विशेष रिश्ता है। दार्शनिक दृष्टि से कहें तो सृष्टि का उद्‌भव शून्य से होता है और उसका लय अनन्त में होता है और गणित की दृष्टि से कहे तो किसी संख्या को अनन्त से विभाजित करें तो वह शून्य हो जाती है और किसी संख्या को शून्य से विभाजित करे तो वह अनन्त हो जाती है। $0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty^{0}, \frac{0}{0}$ तथा 0^{0} अपरिभाषित या अपरिमित कहे जाते हैं।

अनन्त से जुड़े विरोधाभास तथा आधुनिक गणित का विकास

अपने अनन्य गुणों के कारण अनन्त की अवधारण ा चिन्तन को बहुत उलझाती है और अनेक विरोधाभासों को जन्म देती है। शान्त चिन्तन के लिए अभ्यस्त मानव मस्तिष्क अनन्त तक पहुँच नहीं पाता है और त्रुटिपूण र्ा निष्कर्षों पर पहुँचता है। यह क्रम हजारों वर्षों से चल रहा है, विरोधाभासी तर्क प्रस्तुत किए जाते हैं, उनके समाधान मे नए सिद्धांत जन्म लेते हैं और फिर नए प्रश्न खड़े होते हैं। अनन्त ने तर्क, दर्शन, विज्ञान और गणित के विकास में महत्वपूर्ण भूमिका अदा की है। अनन्त से जुड़े कुछ विरोधाभासों की चर्चा नीचे की गई है:

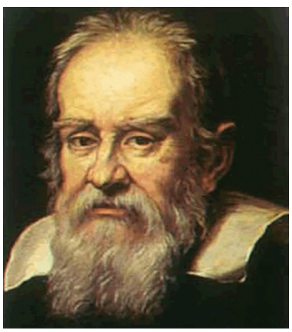
1. जेनों के विरोधाभास

यूनान में ईलियाई दार्शनिक जेनों ने चार स्थितियाँ प्रस्तुत कर और अनन्त का सहारा लेकर दर्शाया कि चाहे आप दिक्काल को पाइथोगोरस की तरह विविक्त ईकाईयों से निर्मित माने या हिप्पासस और थियोडोरस की तरह सातत्यपूर्ण, तर्क हमें सामान्य अनुभव के विपरीत निष्कर्षों पर ले जाते हैं। जेनों के यह विरोधाभास कुछ इस प्रकार हैं:

- किसी रेखा को खण्ड-खण्ड करते जाएं तो अन्त में बिन्दु प्राप्त होता है, जिसका कोई आमाप नहीं है तो फिर आमापहीन बिन्दु से बनी रेखा में लम्बाई कहाँ से आती है? शून्य में शून्य को चाहे जितनी बार भी जोड़ें परिमाण आखिर शून्य ही तो रहना चाहिए।
- यदि दूरी बिन्दुओं से और काल क्षणों से निर्मित मान लें तो फिर यह निष्कर्ष निकलेगा कि किसी भी प्रकार की गति सिर्फ नजरों का धोखा है। जेनों ने गति के विरूद्ध चार तर्क दिए द्विभाजन, वाण, कछुए और खरगोश की दौड़ तथा स्टेट।
- द्विभाजन दर्शाता है कि दूरी सतत् नहीं हो सकती। क्योंकि यदि किसी व्यक्ति को बिन्दु A से बिन्दु B तक जाना है तो पहले वह AB/2 दूरी चलेगा, पर उससे पहले AB/4 दूरी चलनी होगी और फिर AB/8 दूरी चलनी होगी और इस प्रकार अनन्त चरण चलकर वह B तक पहुँचेगा। तब अनन्त चरण चलने में उसे समय भी तो अनन्त लगना चाहिए। अर्थात् A से चल कर B तक व्यक्ति कभी नहीं पहुँचेगा। इसी प्रकार के तर्क अन्य स्थितियों के लिए भी दिए गए।

2. गैलिलियो के विरोधाभास

गैलिलियो गैलिली ने 1638 में संख्या विश्लेषण करते हुए कुछ विरोधाभासों की ओर इंगित किया: यदि एक के संगत एक रख कर तुलना करें तो सम संख्याओं का समुच्चय विषम संख्याओं के समुच्चय के बराबर होगा और ये दोनों समुच्चय मिलकर भी प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय के बराबर होंगे और अलग-अलग भी इसकी संख्या बराबर होगी। ऐसा कैसे? वास्तव में गैलिलियों ने पूर्ण वर्ग संख्याओं के संदर्भ में इस विरोधाभास का संकेत दिया: ''पूर्ण वर्ग संख्याओं की संख्या कुल प्राकृतिक संख्याओं से अधिक होती है।''



3. सतत दशमलव भिन्नों से जुड़े विरोधाभास

यदि किसी भिन्न के हर यानि डिनोमिनेटर के गुणनखण्डों में 2 और 5 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य संख्या आए तो उसकी दशमलव अभिव्यक्ति असामान्य होगी दशमलव के बाद अंकों का क्रम उसमें अनंत तक चलेगा और अंक या तो बार-बार दोहराए जाऐंगे या नहीं दोहराए जायेंगे।

उदाहरणार्थ : $\frac{1}{9} = 0.1111.....$

यदि हम इस समीकरण को दोनों ओर 9 से गुणा करें तो $1 = 0.9999 = 0.\overline{9}$

अब चाहे कितना भी सूक्ष्म अन्तर हो परन्तु 1 और $0.\overline{9}$ में अन्तर तो मालूम पड़ता ही है।

अनन्त की विचित्रताओं में आधुनिक गणित के श्रेष्ठतम मस्तिष्क लम्बे समय तक उलझे रहे और अभी भी उलझे हैं इनमें कुछ प्रमुख नाम हैं: जॉर्ज केन्टर, डेबिड हिल्बर्ट, रीमेन, गाऊस, रामानुजन आदि।

अनन्त के संदर्भ में अंश यानि न्यूमरेटर पूर्ण के बराबर कैसे होता है इसको समझाने के लिए हिल्बर्ट ने अपने एक भाषण में एक होटल का उदाहरण दिया जो यह दर्शाता है कि कैसे अनन्त के गुण परिमित संख्याओं से भिन्न होते हैं: मान लीजिए कि एक होटल है जिसमें कमरों की संख्या परिमित है और सभी कमरों में यात्री ठहरे हैं तो एक नए यात्री के आने पर होटल मैनेजर को कहना पड़ेगा कि माफ कीजिए, कोई कमरा खाली नहीं है। परन्तु यदि कोई होटल ऐसा हो कि उसमें अनन्त कमरे हों और सभी कमरों कें यात्री को अगले कमरे में स्थानान्तरित करके यह मैनेजर नए यात्री के लिए स्थान बना सकता है।

अनन्त के उपयोग

1. सभी अबीजी अपरिमेय संख्याओं को न दोहराई जाने वाली अनन्त दशमलव भिन्न के रूप में लिखा

जाता है, जैसे- $\pi = 3.141592653589793...$ हमें जितने अंकों तक यथार्थता की आवश्यकता हो, उतने अंकों तक इनको पूर्ण करके उपयोग में लाया जा सकता है। आज जब परिशुद्ध गणनाओं के लिए अत्यन्त शुद्ध मानों की आवश्यकता पड़ने लगी है, इन राशियों के मान दशमलव के हजारों अंकों तक शुद्ध ज्ञात होना आवश्यक हो जाता है। इतने शुद्ध मान याद रखने के लिए या तो पद्यात्मक सूत्र रचे गए या गणितीय समीकरण ों बनाई गई। संस्कृत में अंकों के लिए अक्षर निर्धारित कर उनका उपयोग कर बहुअर्थी श्लोक लिखे गए। ऐसा एक श्लोक भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज ने वैदिक गणित में उद्धृत किया है जो $\pi/10$ का मान 32 दशमलव अंकों तक सही-सही बताता है।

अक्षर-कूट
क, त, प एवं ग $\Rightarrow$ 1
ख, थ, फ एवं र $\Rightarrow$ 2
ग, द, ब एवं ल $\Rightarrow$ 3
घ, ध, भ एवं व $\Rightarrow$ 4
ङ, ण, म एवं स $\Rightarrow$ 5
च, ट एवं श $\Rightarrow$ 6
छ, ठ, ष $\Rightarrow$ 7
ज, ड़, ह $\Rightarrow$ 8
झ, ढ़ $\Rightarrow$ 9
क्ष $\Rightarrow$ 0

गोपीभाग्यमधुव्रात-श्रृडि:शोदधिसन्धिग।
खल जीवितखाताब गलहालार संधर।।

साथ में दिए अक्षरकूट का उपयोग कर आप स्वयं देख सकते है कि इस श्लोक से $\pi/10$ का मान 0.31415926535897932384626433832792 ..... आता है, जो इसका 32 अंकों तक सही मान है। किन्तु ये तो केवल याद रखने में मदद करने वाली युक्तियाँ हैं। गणितज्ञ तो संख्याओं के संबंधों में रूचि रखते हैं और उन संबंधों को व्यक्त करने वाले सूत्र तलाशते हैं। अनेक वैज्ञानिकों ने समय-समय पर π के मान के लिए अनेक संतत भिन्न सुभाए। इनमें से हमने यहाँ दो का उल्लेख किया है, जो कि साथ के बॉक्स में दिये गये हैं।

रामानुजन का सूत्र देखने में दुरूह मालूम पड़ता है परन्तु इसके प्रत्येक बार के योग से π के 8 दशमलव अंक आगे तक के मान प्राप्त हो जाते हैं, सुपर कम्प्यूटर का इस्तेमाल करके अब इस सूत्र द्वारा π का मान दशमलव के अरबों अंकों तक शुद्ध प्राप्त किया जा चुका है।

π के मान के लिए सूत्र

न्यूटन का सूत्र :

$$\sin^{-1}(x) = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{1.3.5.7} + ...$$

इसमें $x = \frac{1}{2}$ रखने पर $\Rightarrow$

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{1.3.5.7.2^7} + ...\right)$$

श्री रामानुजन का सूत्र :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{252}{9801}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{4k(1103+26390k)}{(k)^4 \times 396^{4k}}$$

2. वास्तविक परिमेय भिन्नों में यदि हर के अभाज्य गुणनखण्डों में 1, 2, 5 के अतिरिक्त कोई और संख्या आए तो इस भिन्न की दशमलव अभिव्यक्ति में दशमलव के बाद अनन्त अंक आयेंगे, परन्तु इनमें अंकों का एक समुच्चय बार-बार दोहराया जाएगा।

जैसे- $\frac{1}{3} = 0.3333..... = 0.\bar{3}$

ऐसी अनन्त दशमलब भिन्न को यदि साधारण भिन्न में व्यक्त करना हो तो अनन्त के गुणों का उपयोग करना होगा।

इसके लिए मान लिखिए कि $x = 0.\bar{3} = 0.3\bar{3} - (1)$

दोनों तरफ 10 का गुणा करने पर, $10x = 3.\bar{3} - (2)$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) घटाने पर हमें मिलता है $9x = 3$

इसका मतलब, $x=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

3. गणितीय परिकलनों में ऐसी अनेक स्थितियाँ आती हैं जहाँ अनन्त पदों की श्रेणी का योग करने पर कोई परिमित राशि प्राप्त हो जाती है। वहाँ अनन्त के गुणों को उपयोग करके वह राशि प्राप्त की जाती है। स्पष्ट है ऐसी अनन्त श्रेणी एक अभिसारी श्रेणी होती है। नीचे एक अभिसारी श्रेणी और उसके हल की विधि दर्शाई गई है:

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....$$

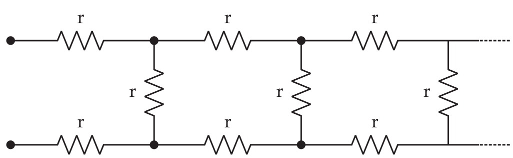
इसे 2 से भाग देने पर निम्नलिखित श्रेणी प्राप्त होगी।

$$\frac{s}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....$$

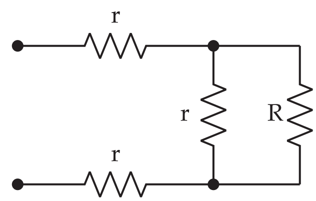
अब s में से $\frac{s}{2}$ वाली श्रेणी को घटाने पर हमें मिलता है $s-\frac{s}{2}=1$ यानि $\frac{s}{2}=1$

अतः $s=\underline{2}$

4. आइए, इस प्रकार की एक व्यवहारिक स्थिति पर विचार करते हैं। मान लीजिए कि प्रतिरोधों (r) का एक अनन्त नेटवर्क नीचे दिए अनुसार है:



इस नेटवर्क का कुल प्रतिरोध यदि R हो तो इसमें से एक कड़ी अलग कर लेने पर शेष बचे नेटवर्क का प्रतिरोध भी अनन्त के गुणों के आधार पर R ही होगा। तब हम उपरोक्त परिपथ के समतुल्य परिमित परिपथ निम्न प्रकार बना सकते हैं:



अब आगे इसे भौतिकी एवं गणित के अन्य नियमों का उपयोग कर हल किया जा सकता है।

5. साधारण गणितीय संक्रियाएं जब अनन्त के लिए उपयोग में लाई जाती हैं तो अनेक विरोधाभासों को जन्म देती हैं। उदाहरण के लिए यदि हम सभी पूर्णांकों का योग करें तो नीचे दिखाई गई तीन अलग-अलग स्थितियाँ मिलती हैं:

$$[1+(-1)]+[2+(-2)]+[3+(-3)]+.....=0$$

$$[1+0]+[2+(-1)]+[3+(-2)]+.....=1+1+1+.....=\infty$$

$$[-1+0]+[-2+1]+...[-3+2]+.....=(-1)+(-1)+.....(-1)=-0$$

अतः सभी वास्तविक संख्याओं का योग अपरिभाषित रहता है।

ऊपर वर्णित अनन्त का विवरण तो इसका एक परिचय मात्र है, जैसे-जैसे आप इसे जानेंगे इसके जादुई प्रभावों से अभिभूत होते जायेंगे।

क्या आप जानते हैं?

सत्येंद्रनाथ बोस एक मात्र भारतीय भौतिक विद हैं, जिनका नाम आइंस्टीन के साथ सम्बद्ध है। आइंस्टीन ने बोस की प्रतिभा को पहचाना और स्वयं वैज्ञानिक जगत को इस बात से अवगत कराया। सत्येंद्रनाथ बोस के अनुसंधान कार्य और फर्मी द्वारा किए गए विकास से ही नाभिकीय भौतिकी के परमाणु कणों को दो भागों में विभिक्त करना संभव हुआ है। इन्हीं को बोस के नाम पर 'बोसोन' तथा फर्मी के नाम पर 'फर्मियोन' कहा गया है।