संख्या सिद्धान्त
The Number Theory

राम शरण दास
Ram Sharan Dass
IV/49, वैशाली, गाजियाबाद - 201010
rsgupta_248@yahpp.co.in

सारांश

राष्ट्रीय गणित वर्ष-2012 ने रामानुजन उन के योगदान और वह क्षेत्र जिसमें उन्होनें कार्य किया था, इन सबके विषय में रूचि और जिज्ञासा जगा दी है। रामानुजम् का सर्वाधिक विशिष्ट योगदान संख्या सिद्धांत के क्षेत्र में है। आप जानना चाहेंगे संख्या सिद्धान्त क्या है? संख्या सिद्धान्त की कुछ आधारभूत संकल्पनाओं से आपका परिचय इस लेख में कराया गया है।

ABSTRACT

National Mathematics year 2012 has aroused tremendous interest and curiosity about the contribution of Ramanujan and the fields he has worked in. Ramanujan has contributed the most in the field of number theory. Would you like to know what number theory is? Some basic concepts of number theory are introduced in this article

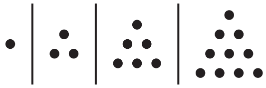
क्या है संख्या सिद्धान्त?

संख्या सिद्धान्त में पूर्णांकों (.....-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.....) के समुच्चय का अध्ययन किया जाता है। इसे उच्च अंक गणित भी कहते हैं: क्योंकि इसमें दैनंदिन जीवन में व्यवहार में लाई जाने वाली गणितीय संक्रियाओं (जोड़, घटा, गुण, भाग आदि) से आगे जाकर विभिन्न संख्या-प्रकारों के पारस्परिक संबंधों का अध्ययन किया जाता है।

संख्याओं के प्रकार

प्राचीन काल से ही प्राकृतिक संख्याओं को विभिन्न प्रकार के संख्या समूहों में बाँटा जाता रहा है। प्राकृतिक संख्याओं के कुछ प्रकार नीचे दिए गए हैं:

- **सम संख्याएं :** वे संख्याएं जो दो से विभाजित हो जाती हैं, जैसे, 2, 4, 6, 8.....
- **विषम संख्याएं :** वे संख्याएं जो दो से विभाजित नही की जा सकती, जैसे, 1, 3, 5, 7.....
- **वर्ग संख्याएं :** जो प्राकृतिक संख्याओं का वर्ग हों, जैसे, 1, 4, 9, 16, 25.....
- **घन संख्याएं :** जो प्राकृतिक संख्याओं का घन हों, जैसे, 1, 8, 27, 64, 125.....
- **अभाज्य संख्याएं :** जो केवल स्वयं से और 1 से विभाजित हों, जैसे, 2, 3, 5, 7, 11.....
- **मिश्रित संख्याएं :** जिनके अभाज्य गुणनखण्ड रूप अन्य संख्याएं उपलब्ध हो यानि जो अभाज्य न हों, जैसे, 4, 6, 8, 9.....
- **1 (मॉड्यूलो 4) संख्याएं :** जिनको 4 से विभाजित करने पर 1 शेष रहे (जैसे, 1, 5, 9, 13, 17.....
- **3 (मॉड्यूलो 4) संख्याएं :** जिनको 4 से विभाजित करने पर 3 शेष रहे, जैसे, 3, 7, 11, 15.....
- **त्रिभुजीय संख्याएं :** जिन संख्याओं के बराबर वस्तुओं को त्रिभुज रूप में रखा जा सके, जैसे: 1, 3, 6, 10, 15, 21.....



• **आदर्श संख्याएं :** जिस संख्या के अपने अतिरिक्त अन्य सब गुणनखंडो का योग स्वयं उस संख्या के बराबर हो, जैसे, 6(1+2+3), 28(1+2,+4+7+14), 496.....

• **फिबोनाशी संख्याएं :** संख्या अनुक्रम जिसमें पहली दो संख्याएं 1, 1 हों तथा आगे की संख्याएं अपनी पूर्ववर्ती दो संख्याओं के योगफल के बराबर हों, जैसे 1, 1, 2, 3, 5, 8.....

संख्या सिद्धान्त संबंधी स्वयंसिद्ध, अनुमान एवं प्रमेय

स्वयंसिद्ध एक मूलभूत कथन है जिसे स्वभावतः सत्य माना जाता है और जिसके लिए किसी प्रमाण की आवश्यकता नहीं होती। **अनुमान** संख्या क्रम के बीच एकसूत्रता की झलक है जो किसी कथन या सूत्र के रूप में प्रस्तुत की जाती है और जिसकी सभी संख्याओं के संबंध में उप्पत्ति अभी नहीं की जा सकी है।

प्रमेय एक ऐसा कथन है जो विचाराधीन रचनाक्रम के संदर्भ में स्वयंसिद्धों के आधार पर पूरे रचनाक्रम के लिए सही सिद्ध किया जा चुका है।

संख्या सिद्धान्त का इतिहास

संख्या सिद्धान्त संबंधी कार्य का सर्वाधिक प्राचीन लिखित प्रमाण एक टूटी हुई मृदा पट्टिका 'टिलम्पटन 322' है जिस पर पाइथागोरियन त्रिकों अर्थात् ऐसे पूर्णाकों a, b, c की सूची है जो संबंध $a^2+b^2=c^2$ द्वारा परस्पर संबंधित हैं। पट्टिका 1800 ई. पूर्व की मेसोपोटामिया की बाबिलोनियाई संस्कृति का अवशेष है और इस पर इतने अधिक त्रिक उत्कीर्णित हैं कि वे किसी अव्यवस्थित प्राकृतिक बल का परिणाम नहीं हो सकते।

बेबिलोनवासियों से थेल्स और पाइथागोरस द्वारा संख्या सिद्धान्त यूक्लिड तक पहुँचा जहाँ क्रमबद्ध संख्या सिद्धान्त के कुछ प्राथमिक प्रमेय देखने को मिलते हैं, जैसे : 'सम और विषम संख्या का गुणनफल सम होता है', ''यदि कोई विषम संख्या किसी सम संख्या को पूर्णतः विभाजित कर सकती है तो वह इसके आधे को भी पूर्णतः विभाजित कर सकती है, आदि।

पाइथोगोरियाई परम्परा में बहुभुजीय और चित्रात्मक संख्याओं जैसे वर्ग, घन संख्या आदि का भी उल्लेख है। इनमें त्रिभुजीय और पंचभुजीय संख्याओं के ऊपर तो कार्य 17वीं शताब्दी में ही शुरू हो पाया।

यूनान में संख्या सिद्धान्त पर सर्वधिक महत्वपूर्ण कार्य संभवतः अलेक्जेन्ड्रिया के डायोफेन्टस का था, जिनके 'अरिथमेटिका' के 13 खंडों में से 6 मूल यूनानी में और इनके अतिरिक्त अन्य चार अरबी अनुवाद हैं। 'अरिथमेटिका' में बहुपद समीकरणों की सहायता से हल किए जा सकने वाली समस्याओं का साधित संकलन है।

भारत में आर्यभट्ट, ब्रहमगुप्त, जयदेव और भास्कराचार्य ने स्वतंत्र रूप से संख्या सिद्धान्त के कई पक्षों पर कार्य किया परन्तु पश्चिम को अठारहवी शताब्दी तक उसका ज्ञान नहीं हो पाया।

आधुनिक संख्या सिद्धान्त की शुरूआत सतरहवी शताब्दी में फार्मेट से होती है और बाद में यूलर, गोल्डबैक, लाग्रांज, गाऊस, डिरिक्लेट, रीमैन, जैकोबी, क्रैमर, कैन्टर, हिलबंद, हार्डी, रामानुजम और हरिश्चन्द्र आदि के कार्य ने संख्या सिद्धान्त को गणितीय अध्ययन के केन्द्र में ला दिया।

संख्या सिद्धान्त के स्वयंसिद्ध

पूर्ण संख्याओं, उनके पारस्परिक संबंधों और उनसे संबंधित संक्रियाओं के संबंध में कुछ आधार तथ्य जिनसे संख्या सिद्धान्त के प्रमेयों को सिद्ध किया जाता है इस प्रकार हैं:

किन्ही तीन पूर्णाकों के लिए

1. गुणा एवं समाकलन पर संवृत्ति (closure): अर्थात् यह तथ्य कि $a \times b$ एवं $a + b$ एवं भी पूर्णाक होंगे।
2. गुणा की एवं समाकलन की क्रम विनिमेयता (commutativity): अर्थात्
   $a \times b = b \times a$
   एवं $a + b = b + a$
3. गुणा की एवं समाकलन की सहचारिता (Associativity): अर्थात्

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c$

एवं $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

4. वितरणशीलता (Distributiliy): अर्थात् $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
5. त्रिविभाज्यता (Trichotomy): $a < 0$, $a = 0$ अथवा $a > 0$
6. सु–क्रमित सिद्धान्त (Well Ordered Principle): धन पूर्णाकों के किसी अ-रिक्त समुच्चय में एक घटक न्यूनतम होगा।
7. न–नगण्यता (Non-Triviality): $0 \neq 1$
8. अस्तित्त्व (Existence) 1 एक पूर्णांक है।

संख्या सिद्धान्त के कुछ प्रसिद्ध अनुमान (Conjectures)

संख्याओं की प्रकृति और उनके पारस्परिक संबंधों को व्यक्त करने वाले अनुमानों की सूची लम्बी है। इनमें से कुछ प्रसिद्ध अनुमानों का उल्लेख नीचे किया गया है। ये सभी अनुमान डियोफैन्टाइन गणित अर्थात् उस तरह के बीजगणितीय समीकरणों से संबंधित है जिनमें अनेक चर सम्मिलित होते हैं और जिनके हल के रूप में परिमेय संख्याएं प्राप्त होती हैं।

1. एबीसी अनुमान (ABC Conjecture)

ABC अनुमान संख्या सिद्धान्त का एक व्यापक अनुमान है जिसने अनेक नए अनुमानों की आधारभूमि तैयार की और पुराने अनुमानों को समझने में सहायता की। इस अनुमान में वर्ग–मुक्त संख्याओं की अवधारण ाा अर्थात् ऐसे पूर्णाकों की बात की गई है, जो किसी संख्या के वर्ग से विभाजित नहीं होते। इसे यदि sqp(x) से व्यक्त करें तो

$sqp(15)$, $sqp(16) = 2^4 = 2$ तथा

$sqp(1400) = sqp(2^3 \times 5^2 \times 7) = 2 \times 5 \times 7 = 70$ होगा।

इस अनुमान के अनुसार यदि आप कोई संख्या $\in > 0$ लें तो तीन पूर्णांक A, B और C ऐसे पाए जा सकते हैं कि $A + B = C$ हो और $[sqp(A - BC)]/C < \in$ हो। $C < 10^{18}$ तक के लिए इस अनुमान की पुष्टि की जा चुकी है किन्तु इसका कोई गणितीय प्रमाण अभी तक नहीं दिया जा सका है।

2. गोल्डबैक का अनुमान (Goldbach's Conjecture)

''दो से बडी प्रत्येक सम संख्या को दो अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।'' इस अनुमान की पुष्टि 4×10^{18} तक सभी सम–संख्याओं के लिए की जा चुकी है परन्तु गणितीय प्रमाण की प्रतीक्षा है।

उदाहरण:

$10 = 3 + 7$

$100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$

3. जुडवाँ अभाज्य संख्याओं संबंधी अनुमान

''जुडवां अभाज्य संख्याओं की संख्या अनन्त होती है।''

जुडवाँ अभाज्य संख्याएं वे अभाज्य संख्याएं हैं जिनके बीच अन्तर दो हो इस प्रकार (3, 5), (5, 7), (11, 13) आदि जुडवाँ अभाज्य संख्याएं हैं।

4. बील का अनुमान

''यदि $A^x + B^y = C^z$ हो, जहाँ A, B, C धन पूर्णांक हैं और x, y, z के मान 2 से अधिक है, तो A, B, C में एक सर्वनिष्ठ अभाज्य गुणक होना चाहिए।''

इस अनुमान को सिद्ध करने के लिए एण्डी बील ने 10 लाख डॉलर का पुरस्कार घोषित किया हुआ है।

5. कॉलेट्ज का अनुमान

''कोई भी प्राकृतिक संख्या लें, यदि यह सम संख्या है तो दो से भाग करके और विषम संख्या हो तो सीधे ही इसे 3 से गुणा करके इसमे 1 जोड़ें। प्राप्त संख्या पर यही क्रम चलाएं और बार–बार यह संक्रिया दोहराते रहें तो चाहे आप किसी भी संख्या से शुरू करें अंत में आपको परिणाम में सदैव 1 ही प्राप्त होगा।''

उदाहरण :

$$23\times3+1=\frac{70}{2}=35\times3+1=\frac{106}{2}$$

$$=53\times3+1=\frac{160}{2}=80$$

$$\frac{80}{2}=\frac{40}{2}=\frac{20}{2}=\frac{10}{2}=5\times3+1$$

$$=\frac{16}{2}=\frac{8}{2}=\frac{4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

गणितीय अनुमानों की पुष्टि समय बिताने की एक अच्छी युक्ति है और इनको प्रमाणित करना एक बड़ी गणितीय उपलब्धि।

संख्या सिद्धान्त के कुछ प्रसिद्ध प्रमेय

1. लाग्रांज का चार वर्गों का प्रमेय

''किसी भी प्राकृतिक संख्या को चार पूर्णांक वर्गों के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

अर्थात् $P=a_0^2+a_1^1+a_2^2+a_3^2$

उदाहरण : $310=17^2+4^2+2^2+1^2$

2. अंकगणित का मूलभूत प्रमेय :

1 से बड़ा कोई भी पूर्णाक या तो अभाज्य संख्या होगी या फिर अभाज्य संख्याओं का गुणनफल। यदि संख्या भाज्य है तो उसके अभाज्य गुणनखण्ड अनन्य होते हैं लिखने में केवल उनका क्रम परिवर्तित हो सकता है स्वयं गुणनखंड परिवर्तित नहीं हो सकते।

उदाहरण : $70=2\times5\times7$

प्रमेय के अनुसार 70 के 2, 5, 7 के अतिरिक्त अन्य कोई अभाज्य गुणनखण्ड नहीं हो सकते।

3. फर्मेट का लघु प्रमेय

यदि P कोई अभाज्य संख्या हो और a कोई पूर्ण संख्या हो तो (a^P-a) को P से पूर्णत: विभाजित किया जा सकेगा।

उदाहरण : यदि $P=5$ और $a=2$ लें, तो $2^5-2=32-2=30$ स्पष्टत: यह संख्या (30) 5 से भाज्य है।

4. युक्लिड का अभाज्य संख्याओं की अनन्तता संबंधी प्रमेय

यूक्लिड नें सिद्ध किया कि अभाज्य संख्याओं की संख्या अनन्त होती है।

5. ऑयलर का प्रमेय :

यदि n कोई धन अभाज्य पूर्णांक है और $n\geq1$ है तो n से कम ऐसे सभी पूर्णांको की संख्या जो n की असहभाज्य संख्याऐं हों, $(n-1)$ होती है। किसी संख्या a की असहभाज्य संख्या b ऐसी संख्या है जिनके बीच 1 के अतिरिक्त कोई अन्य संख्या समान गुणनखण्ड के रूप में विद्यमान न हो। इन $n-1$ संख्याओं का समुच्चय ऑयलर का टोटिएंट फलन या ϕ (फाई) फलन कहलाता है।

अत: यूलर के प्रमेय के अनुसार $\phi(n)=(n-1)$, इस प्रकार :

$\phi(2)=1$

$\phi(3)=2, \{1, 2\}$

$\phi(5)=4, \{1, 2, 3, 4\}$

$\phi(7)=6, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\phi(11)=10, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

भाज्य संख्याओं के लिए यह प्रमेय लागू नहीं होगा जैसे :

$$\phi(4)=2, \{1, 3\}$$
$$\phi(6)=2, \{1, 5\}$$

इस प्रकार यह प्रमेय अभांज्य संख्याओं को पहचानने में सहायता करता है।

भारत के सुप्रसिद्ध गणितज्ञ एवं ज्योतिषी आर्यभट्ट त्रिकोणमिति के आविष्कर्ता थे। उनके ग्रंथ 'आर्यभट्टीय' में त्रिकोणमिति का पहली बार उल्लेख किया गया है।