वैदिक संगणना प्रविधि-प्रतिमान
Vedic Computational Paradigm

प्रो. ओम विकास
Prof. Om Vikas
C-15 Tarang Apartment,
19, I.P. Extn, Delhi - 110 092
e-mail id : dr.omvikas@gmail.com

सारांश

19वीं और 20वीं सदी में आधुनिक गणित का विकास तेजी से हुआ। 2500 वर्ष पहले खगोल विज्ञान, स्थापत्य, भवन निर्माण आदि क्षेत्रों में वैदिक गणित का प्रयोग किया जा रहा था। शून्य, दशमलव प्रणाली, बीज गणित की परिकल्पना उसी काल में की गई। जटिल गणनाओं के लिए सुगम प्रविधियों को विकसित किया गया। वैदिक गणित का सुगम प्राविधिक स्वरूप शुल्ब सूत्रों से वर्णित है। लेख में प्राचीन और आधुनिक गणना प्रणालियों के सह-ज्ञान से तार्किक विश्लेषण के साथ सुगम वैदिक गणित को आधुनिक गणितीय परिप्रेक्ष्य में रखने का प्रयास किया गया है। एक नवीन प्रविधि भी प्रस्तावित है जो पैटर्न के आधाार पर है। इससे कम्प्यूटर संगणना गति बढाने में मदद मिल सकती हैं। ये प्रविधियाँ बच्चों में अनुप्रेरित तार्किक विश्लेषण और कौशल विकास में भी सहायक होगीं।

विषय बोधक शब्द: पैटर्न आधारित कलन विधि (एल्गोरिद्म), वैदिक गणित, गणितीय सृजनात्मकता, अनुप्रेरित तार्किक विश्लेषण।

ABSTRACT

Modern Mathematics advanced during 19th & 20th century. Vedic Maths was developed and used about 2500 years ago in Astronomy, Architecture and Building Constructions. Zero, Decimal Systems and Algebra were in Vogue. Simple Algorithms were developed to solve complex problems. Simple techniques of Vedic Mathematics are based on sulb sutras. Confluence of Vedic Maths and Modern Mathematics knowledge may help in promoting Mathematical reasoning and innovation. This paper presents basis of Vedic Mathematics in the perspective of modern Mathematics. A new multiplication algorithm is also presented. Pattern based computing may enhance computing speed. These simple techniques will help in developing inductive reasoning and mathematical skill in children.

Keywords: Pattern based Algorithm, Vedic Maths, Mathematical Creativity, Inductive Reasoning

1. विषय-प्रवेश

दुनिया भर में प्रयास किए जा रहे है कि बच्चों में गणितीय कौशल का विकास हो, नवाचार प्रवृत्ति का विकास हो। गणित में अभिरूचि बढ़े। यदि एक से अधिक समस्या-समाधान प्रणालियों की जानकारी है तो नवाचार की संभावनाएं बढ जाती हैं तार्किक विश्लेषण अनुप्रेरक (इंडक्टिव) हो सकता है अथवा आगमनात्मक (डिडक्टिव)। इंडक्टिव विश्लेषण में अवलोकन से प्राप्त

डेटा के आधार पर निष्कर्ष पर पहुंचते हैं। जबकि डिडक्टिव विश्लेषण में थ्योरी, प्रमेय, स्वयंसिद्ध नियमों के आधार पर निष्कर्ष पर पहुंचते हैं। अवलोकन प्रकिया में पैटर्न देखते हैं, अनुमान करते हैं यहाँ अन्त: बोध महत्त्वपूर्ण है। गणितीय सृजनात्मक कौशल के लिए इंडक्टिव रीजनिंग (अनुप्रेरित तार्किक विश्लेषण) महत्वपूर्ण उपादान हैं। 2500 वर्ष पूर्व वैदिक गणित का विकास हुआ, प्रचलन में रहा। अनेक आधारभूत योगदान उल्लेखनीय है जैसे शून्य एवं संख्या का स्थान परक मान, ज्यामिति, खगोल विज्ञान, बीज गणित, वर्गमूल कलन विधियाँ आदि। मंदिर, किला, सेतु, भवन निर्माण में गणित का प्रयोग सामान्य रूप से होता था। सुबोध गणित जन सामान्य में भी प्रचलित था। इससे उस काल में अनुप्रेरक तार्किक विश्लेषण की सहज प्रवृत्ति भारतीय समाज में विकसित हुई, जो नवाचार के लिए महत्त्वपूर्ण है।

2. संख्या प्रणाली

अवलोकन जन्म गणित प्राय: प्राकृतिक संख्याओं तक ही सीमित है। सामान्य गणित में अनुक्रमिक गणना को इसमें सम्मिलित किया जाता है। वैदिक गणित में अंक स्तर पर अलग-अलग एक समय में समान्तर (पैरालल) गणना कर सकते हैं। इससे गणना-गति बढ़ जाएगी। गणना किसी भी आधार संख्या पर संभव हैं। यहाँ पर विषय प्रतिपादन की सुगमता की दृष्टि से वैदिक गणनाएं दशमलव प्रणाली पर प्रस्तुत हैं।

3. बीजगणितीय सुसंगतता

महाभारत में नकुल को सबसे सुंदर बताया गया हैं। नकुल अंक वे है, जो दशमलव प्रणाली में औसत से अधिक हों। नकुल (ऊपरी) अंको को नीचे के अंकों में बदलने को वि-नकुलन कहते हैं। इस विधि से अंक स्तरीय गणना संभव है और समान्तर गणना भी।

अंक-समूह का वि-नकुलन करने से 10 का पूरक (10's Complement) मिलता हैं।

इस संख्या सेट पर रैखिक बीज गणित के अपेक्षित स्वयं सिद्ध नियम, जैसे: विनिमेयता (Commutability), साहचर्य (Associatively), वितरण (Distributivity), एकल पहचान Identity, और व्युतिक्रम Inverse लागू होते हैं।

$$\text{Commutativity}: a+b=b+a,\ a\times b=b\times a$$

$$\text{Associativity}: a+(b+c)=(a+b)+c,\ a\times b(\times c)$$
$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

$$\text{Distributivity}: a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

$$\text{Identity}: a+0=a,\ a\times 1=a\ (\text{Integer}, a\in I)$$
$$a+0.0=a\times 1.0=a\ (\text{Real}, a\in R)$$
$$a+(0+j0)=a,\ a\times(1+j0)=a$$
$$(\text{Complex}, a\in c)$$

$$\text{Inverse}: a+\bar{a}=0,\ a\times a^{-1}=1$$

$a\in I$ or $a\in R$ or $a\in C$

(Integer / Real / Complex)

4. शुल्ब सूत्र

वैदिक गणित के 16 आधारभूत सूत्र/फॉर्मूले है और 13 उपसूत्र।

शुल्ब सूत्र

1. एकाधिकेन पूर्वेण (अर्थात् पिछले वाले से एक अधिक)

   By one more than the previous one.

2. निखिलं नवतश्चरम दशत: (अर्थात् सभी को 9 से और अंतिम अंक को 10 से घटावें)

   All from 9 and the last from 10.

3. ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् (अर्थात् ऊर्ध्व अंकों और तिर्यक् (Cross wise) अंकों को गुणा करें)

   Vertically and Crosswise

4. परावर्त्य योजयेत् (अर्थात् खड़ी पंक्ति को पड़ी पंक्ति में बदल कर योजित करना)

   Transpose and adjust

5. शून्यं साम्य समुच्चये (अर्थात् जब योगफल समान हो तो योग शून्य होगा)
When the sum is the same then the sum is zero.
6. आनुरूप्ये शून्यमन्यत् (अर्थात् यदि एक अनुपात में है तो दूसरा शून्य होगा)
If one is in ratio the other is zero.
7. संकलन व्यवकलनाभ्याम् (अर्थात् जोड़ कर और घटा कर)
By addition and by subtraction.
8. पूर्णापूर्णभ्याम् (अर्थात् पूर्णता या अपूर्णता से
By the completion or non-completion.
9. चलन कलनभ्याम् (अर्थात् विषमताएं और समानताएं)
Differences and similarities-
10. यावदनम् (अर्थात् कमी की कोई भी सीमा)
Whatever the extent of its deficiency.
11. व्यष्टि व समष्टि (अर्थात् अंश अथवा सम्पूर्ण)
Individual or the whole
12. शेषन्यंकेन चरमेण (अर्थात् शेषमान अंतिम अंक से)
The remainders by the last digit.
13. सोपानत्य द्वयम् अन्त्यम् (अर्थात् अन्तिम और अन्तिम से पहले (उपान्त्य) का दुगना)
The ultimate and twice the penultimate.
14. एक न्यूनेन पूर्वेण (अर्थात् पिछले अंक से एक कम)
By one less than the previous one.
15. गुणित समुच्चयः (अर्थात् योगफलों का गुणनफल समान है गुणनफलों के योग के)
The product of the sum is equal to the sum of the product.
16. गुणक समुच्चयः (अर्थात् योगफल के पद खंड़ों के बराबर हैं पदखंड़ों का योगफल)
The factors of the sum is equal to the sum of the factors.

5. उपसूत्र (Corollary)

1. आनुरूप्येण
2. शिष्यते शेष संज्ञः
3. आद्यमाद्ये नान्त्यमन्त्येन
4. केवलैः सप्तकं गुण्यात्
5. वेष्टनम्
6. यावदूनं तावदूनं
7. यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत्
8. अन्त्ययोर्दशकेऽप
9. अन्त्ययोरेव
10. समुच्चयः गुणितः
11. लोपस्थामानाभ्याम्
12. विलोकनम्
13. गुणितः समुच्चयः समुच्चय गुणितः

सूत्र, उपसूत्र वस्तुतः Micro-operations हैं, जो एक पैटर्न के मिलने पर काम में लिए जाने पर कम से कम समय में हल दे सकते हैं।

पैटर्न मिलान न होने पर सामान्य गणितीय प्रक्रिया करते हैं। वैदिक कम्प्यूटिंग का तात्पर्य कम्प्यूटर से इन विधियों से संगणना करना। हां, इससे कम्प्यूटर से संगणना प्रविधि में पैटर्न–आधारी संगणना का नया खोज मार्ग प्रशस्त होता हैं। बच्चों में पैटर्न पहचानने की क्षमता बढ़ती है; सृजनात्मकता का विकास होता हैं।

आइए, कुछ उदाहरण लेकर इस विषय को समझें।

1. **विनकुलम्** (इसमें सूत्र–2 ''निखिलं नवतः चरमं दशतः'' का प्रयोग करते हैं।)

इस संक्रिया का उपयोग 5 व उससे अधिक बड़े अंकों को 5 से छोटे अंकों में बदलकर आगे की संक्रियाएं करने के लिए होता है। इस प्रकार प्राप्त विनकुल (5 से छोटे) अंकों के ऊपर बार लगाकर व्यक्त किया जाता है। संख्या के जिस अंक समूह

के ऊपर विनकुल बार होता है, उसे ऋण भाग मानकर शेष संख्या से घटाने पर मूल रूप में संख्या प्राप्त होती है। इस प्रकार $n_1 = 63\overline{14} = 6300 - 14 = 6286$

2. **ऊर्ध्व गुणन (Vertical Product)**

$$\begin{array}{c} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{2} \\ \times 3 \\ \hline \overline{6} \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \\ \times b \\ \hline a \times b \end{array}$$

3. **तिर्यक् गुणन (Cross Product)**

तिर्यक् गुणन का योग (Sum of Cross Products)

तिर्यक् +

$$\begin{array}{c} 2 \diagdown\!\!\!\diagup 3 \\ 1 \quad 2 \\ \hline (2\times2)+(3\times1)=7 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \diagdown\!\!\!\diagup b \\ c \quad d \\ \hline (a\times d)+(b\times c) \end{array}$$

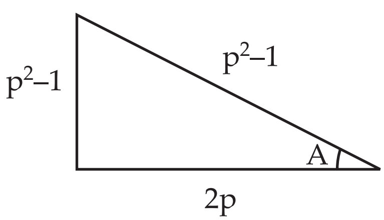
व्यव तिर्यक्गुणन (Difference of Cross Products)

तिर्यक –

$$\begin{array}{c} 2 \diagdown\!\!\!\diagup 3 \\ 1 \quad 2 \\ \hline (2\times2)-(3\times1)=1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} a \diagdown\!\!\!\diagup b \\ c \quad d \\ \hline (a\times d)-(b\times c) \end{array}$$

4. **त्रिभुजांक (समकोण त्रिभुज के संदर्भ में)**

$\pm$ कोण	भुजा		
A	$P^2 - 1$	2P	$P^2 + 1$
A	3	4	5



त्रिभुजांक का बीजक P हैं। पाइथागोरस थ्योरेम (प्रमेय) की भांति हैं। यह कात्यायन के शुल्ब सूत्र से व्युत्पन्न है।

5. **एकाधिकेन पूर्वेण** अर्थात् पिछले अंक से एक अधिक विनकुलम् में उच्च (5, 6, 7, 8, 9) अंकों को 10 का पूरक कर के लिख लेते है, अधो अंक (0, 1, 2, 3, 4) आने पर रूक जाते है और उसमें एक जोड़ देते है,

उदाहरण

$$N = 23578$$
$$VoN = 24\overline{422}$$

6. **एक न्यूनेन पूर्वेण** N का विनकुलम् (अर्थात् पिछली से एक कम): दो संख्याओं को गुणा करते समय पहले एक खडी पंक्ति (कॉलम) पर गुणा करते हैं, फिर दो कॉलम पर, फिर तीन कॉलम पर, सभी कॉलम को साथ ले लेने के बाद FIFO ''प्रथम आए प्रथम गए'' के आधार पर अंतिम कॉलम आने तक एक-एक कॉलम कम करते जाते हैं।

एकाधिकेन पूर्वेण

$$\begin{array}{c} \overline{m_2}\ m_1\ m_0 \\ k_2\ k_1\ k_0 \\ \hline (\text{पद}-1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{m_2}\ \overline{m_1}\ m_0 \\ k_2\ k_1\ k_0 \\ \hline (\text{पद}-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overline{m_2}\ \overline{m_1}\ \overline{m_0} \\ k_2\ k_1\ k_0 \\ \hline (\text{पद}-3) \end{array}$$

एकन्यूनेन पूर्वेण

$$\begin{array}{c} m_2\ \overline{m_1}\ \overline{m_0} \\ k_2\ k_1\ k_0 \\ \hline (\text{पद}-4) \end{array} \qquad \begin{array}{c} m_2\ m_1\ \overline{m_0} \\ k_2\ k_1\ k_0 \\ \hline (\text{पद}-5) \end{array}$$

3 अंकीय संख्याओं का गुणनफल 5 अंकीय संख्या होगी। यह गुणा बांए से अथवा दाएं से दोनों ओर से कर सकते है।

7. बीजांक समजाँच

$A \times B = C$ $\quad A = a_2\, a_1$, $\quad B = b_2\, b_1$

A का बीजांक $= \Sigma a_i$

B का बीजांक $= \Sigma b_i$

C का बीजांक $= \Sigma c_i$

सही योगफल होने पर $= \Sigma a_i + \Sigma b_i = \Sigma c_i$

सही गुणनफल होने पर $= \Sigma a_i \times \Sigma b_i = \Sigma c_i$

उदाहरण

		बीजांक			बीजांक
A	2 3	5	A	2 3	5
+B	+1 2	+3	×B	×1 2	×3
C	3 5	8	C	2 7 6	15

8.जोड़

पूर्णाक संख्या (Integer)

$$\begin{array}{cc} a_2 & a_1 \\ +b_2 & b_1 \\ \hline (a_2+b_2) & (a_1+b_1) \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 2 & 8 \\ +1 & 2 \\ \hline 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 3 & \bar{2} \\ +1 & 2 \\ \hline 4 & 0 \end{array}$$

वास्तविक संख्या (Real Number)

$$\begin{array}{r} 28.59 \\ +17.40 \\ \hline 45.99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\bar{1}.\bar{4}\bar{1} \\ +2\bar{3}.40 \\ \hline 5\bar{4}.0\bar{1} \end{array}$$

$$5\bar{4}.0\bar{1} = 45.99$$

समिश्र संख्या (Complex Numbers) विनकुलम् प्रयोग द्वारा

$$\begin{array}{r} 2.3 + j1.3 \\ +4.5 - j3.8 \\ \hline 6.8 - j2.5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.3 + j1.3 \\ +\ 5.\bar{5} - j\bar{3}.\bar{8} \\ \hline = 7.\bar{2} - j\bar{2}.\bar{5} \\ = 6.8 - j2.5 \end{array}$$

9. गुणा दो संख्याओं को गुणा करने के लिए निम्नलिखित उपक्रियाएं करते हैं:

- संख्याओं को विनकुलित करके लिखे।
- अंको को एक अंक का स्थान छोड़ते हुए फैलावें।
- प्रक्रिया का प्रारम्भ बाएं से अथवा दाएं से करें।
- अंक के नीचे ऊर्ध्व गुणनफल लिखें।
- प्रथम तिर्यक्⁺ 1 अंक दूर (अर्थात् समीप) लें और छोडे हुए अंक स्थान के नीचे लिखें।
- द्वितीय तिर्यक्⁺ 2 अंक दूर लें और मध्य अंक के नीचे लिखें।
- तृतीय तिर्यक्⁺ 3 अंक दूर लें और मध्य अंक के नीचे लिखें।
- इसी प्रकार करें, और अंतिम अंक तक पहुँचने पर रूकें।
- कॉलम अंकों को जोडें।
- विनकुलित योगफल का सामान्यीकरण करें।

$R_{ii} = a_i b_i$ for i = 0, ..., 4

$R_{i(i-1)} = a_i b_{i-1} + b_i a_{i-1}$ for i = 1, ..., 4

$R_{i(i-2)} = a_i b_{i-2} + b_i a_{i-2}$ for i = 2, ..., 4

$R_{i(i-3)} = a_i b_{i-3} + b_i a_{i-3}$ for i = 3, ..., 4

$R_{i(i-4)} = a_i b_{i-4} + b_i a_{i-4}$ for i = 4

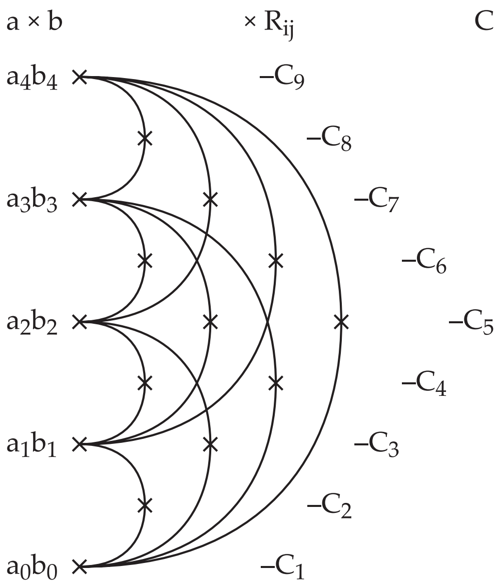
$a \times b = (a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, a_1\, a_0) \times (b_5\, b_4\, b_3\, b_2\, b_1\, b_0)$

$= [R_{44} : R_{43} : (R_{42} + R_{33}) : (R_{41} + R_{32}) : (R_{40} + R_{31} + R_{22}) : (R_{30} + R_{21})(R_{20} + R_{11}) : R_{10} : R_{00}]$

a_4		a_3		a_2		a_1		a_0	प्रथम संख्या
b_4	↓	b_3	↓	b_2	↓	b_1	↓	b_0	द्वितीय संख्या
R_{44}		R_{33}		R_{22}		R_{11}		R_{00}	ऊर्ध्व गुणन
	R_{43}		R_{32}		R_{21}		R_{10}		प्रथम तिर्यक्+ (d = 0) गुणनयोग
		R_{42}		R_{31}		R_{20}			द्वितीय तिर्यक्+ (d = 1) गुणनयोग
			R_{41}		R_{30}				तृतीय तिर्यक्+ (d = 2) गुणनयोग
				R_{40}					चतुर्थ तिर्यक्+ (d = 3) गुणनयोग

R_{44} R_{43} $(R_{42}+R_{33})$ $(R_{41}+R_{32})$ $(R_{22}+R_{31}+R_{40})$ $(R_{21}+R_{30})$ $(R_{11}+R_{20})$ (R_{10}) (R_{00})

गुणनफल स्थानपरक अंको से बनी संख्या है। हासिल (Carry) को बांए अंक मे जोड़ते है इसी को इस चित्र से दर्शाया गया है।



सामान्यतः दो संख्याओं को गुणा करने में n^2 गुणन और $n(n-2)$ जोड़ प्रक्रियाएं करनी पड़ती हैं। ऊर्ध्व तिर्यक प्रयोग से n ऊर्ध्व गुणन, $\frac{n(n-1)}{2}$ तिर्यक जोड़ प्रक्रियाएं आवश्यक हैं।

तिर्यक्+ (तिर्यक जोड़) प्रक्रिया में गुणन $2\times\frac{(n-1)}{2}$ और $(n-2)(n-1)$ जोड प्रक्रियाएं हैं।

इस प्रकार $n + n(n-1)$ अर्थात् n^2 गुणन और $(n-2)(n-1)$ जोड़ प्रक्रियाएं आवश्यक हैं।

जोड़-गुणन प्रक्रियाएं समान है, लेकिन इस विधि से गुणन अंक के स्तर पर एक समय में (Parallel) गुणन सम्भव हैं। इस प्रकार गति बढेगी।

ऊर्ध्व-तिर्यक् गुणन पद्धति का सत्यापन

$$
\begin{aligned}
A &= (a_2a_1a_0)\\
B &= (b_2b_1b_0)\\
A\times B &= (a_2a_1a_0)\times(b_2b_1b_0)\\
&= (a_2\times10^2 + a_1\times10^1 + a_0\times10^0)\\
&\quad \times(b_2\times10^2 + b_1\times10^1 + a_0\times10^0)\\
&= (a_2b_2\times10^4 + (a_1+b_2)\times10^3 + a_1b_1\times10^2)\\
&\quad + a_0b_0 + (a_2b_0 + a_0b_2)\times10^2 + (a_1b_0 + a_0b_1)\\
&\quad \times10^1 + a_0b_0\times10^0\\
&= R_{22}\times10^4 + R_{21}\times10^3 + (R_{11}+R_{20})\times10^2\\
&\quad + R_{10}\times10^1 + R_{00}\times10^0
\end{aligned}
$$

उदाहरण : तीन अंकीय पूर्णांक संख्याओं का गुणा

$$a = a_2\ a_1\ a_0$$
$$\times b = b_2\ b_1\ b_0$$

$$\begin{array}{ccccc} a_2 & & a_1 & & a_0 \\ b_2 & & b_1 & & b_0 \\ \hline R_{22} & | & R_{11} & | & R_{00} \\ & R_{21} & | & R_{10} & \\ & & R_{20} & & \\ \hline \end{array}$$

$$R_{22} : R_{21} : (R_{11} + R_{20}) : R_{10} : R_{00}$$

टिप्पणी : योग करते समय यदि किसी भी ऊर्ध्व स्तंभ के योग में दो अंकों की संख्या प्राप्त हो तो दहाई का अंक हासिल के रूप में बाँई ओर के स्तंभ के योग में जुड़ जाता है।

वास्तविक एवं समिश्र (Real & Complex) संख्याओं की गुणा

$$a = a_1a_0a_{-1}a_{-2} = (a_1a_0).(a_{-1}a_{-2})$$
$$xa = b_1b_0b_{-1}b_{-2} = (b_1b_0).(b_{-1}b_{-2})$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_0 & & a_{-1} & & a_{-2} \\ b_1 & & b_0 & & b_{-1} & & b_{-2} \\ \hline R_{11} & & R_{00} & & R_{-1-1} & & R_{-2-2} \\ & R_{10} & | & R_{0-1} & | & R_{-1-2} & \\ & & R_{1-1} & | & R_{0-2} & & \\ & & & R_{1-2} & & & \\ \hline \end{array}$$

$$R_{11} : R_{10} : (R_{00} + R_{1-1}) : (R_{0-1} + R_{1-2}) : (R_{-1-1} + R_{0-2}) : R_{-1-2} : R_{-2-2}$$

उदाहरण-1

वास्तविक संख्याएं- $12.38 \times 21.12 = 261.4656$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & \cdot & 4 & & \bar{2} \\ 2 & & 1 & \cdot & 1 & & 2 \\ \hline 2 & & 2 & & 4 & & \bar{\bar{4}} \\ & 5 & & \dot{6} & & 6 & \\ & & 9 & & 2 & & \\ & & & \dot{\bar{2}} & & & \\ \hline 2 & 6 & 1 & \dot{4} & 6 & 6 & \bar{4} \\ \hline =2 & 6 & 1 & .4 & 6 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

उदाहरण-2

समिश्र $(1 + j8) \times (1 - j2) = (18 + j4)$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & j1 & & j\bar{2} \\ 1 & & j0 & & j\bar{2} \\ \hline 2 & & 0 & & \bar{4} \\ j1 & & & 2 & \\ & & j\bar{6} & & \\ \hline 2 : & j1 : & (0 + j\bar{6}) & : 2 : & \bar{4} \\ 2 & & j(1\bar{6}) & & (2\bar{4}) \\ & & (2 + 2\bar{4}) + j(1\bar{6}) & & \\ & & = 18 + j4 & & \\ \hline \end{array}$$

भाग प्रक्रिया गुणन प्रतिक्रिया के विपरीत हैं।

उदाहरण-3

$14.20/2.3 \Rightarrow Q = 6.1$ और $R = 0.17$

$$\begin{array}{ccccc} 6 & & \cdot & 1 & Q \\ \hline 2 & & \cdot & 3 & Dr \\ 1 & 4 & \cdot & 2.0 & Dd \\ \hline 1 & 2 & \cdot & 8.0 & \\ \hline & & \cdot & 4.0 & \\ & & \cdot & \bar{2}.\bar{3} & \\ & & \cdot & 17 & \\ \hline \end{array}$$

$$Q = 6.1 \text{ and } R = 0.17$$

पैटर्न आधारित एल्गोरिद्म

केस 1

यदि भाजक संख्या 10 की गुणन संख्या के करीब है अर्थात् 9, 19 (10 गुणा - 1) हैं, तो D भाज्य संख्या है, Q भाजनफल है

$$Q = \frac{D}{9}$$

$$9 \times Q = D$$

$$(10-1)Q = D$$

$$10Q = Q + D$$

$$Q = \frac{D}{10} + \frac{Q}{10} = \frac{D}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{D}{10} + \frac{Q}{10}\right)$$

$$= \frac{D}{10} + \frac{D}{100} + \frac{D}{1000} + \ldots\ldots$$

$$D = d_1 d_0$$

$$Q = d_1 d_0 / 9$$

$$= d_1.d_0 + 0.d_1 d_0 + 0.0 d_1 d_0 + 0.00 d_1 d_0$$

$$= d_1.d_1 d_1 d_1 d_1$$

$$+ .d_0 d_0 d_0 d_0 \ldots\ldots$$

$$d_1.(d_1 d_0)(d_1 d_0)(d_1 d_0) \ldots\ldots$$

उदाहरण-1

(i) $$Q = \frac{2}{9} = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots\ldots$$

$$= 0.222\ldots\ldots$$

(ii) $$Q = \frac{59}{9} = \begin{array}{r} 5.5555 \\ 0.9999 \\ \hline 6.5555 \end{array}$$

यदि बेस $= b$ है, गुणांक $m = \frac{b}{10}$ अर्थात् भाजक संख्या 10 की गुणा के करीब है। D भाज्य संख्या है। Q भाजनफल है। R शेष संख्या है।

$$Q = \frac{D}{b} + \frac{D}{b^2} + \frac{D}{b^3} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{D}{m.10} + \frac{D}{m^2.10^2} + \frac{D}{m^3.10^3} + \ldots\ldots$$

$$Q = (q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots)$$

$$r_1 = D - b \times q_1$$

$$r_i q_i = r_i + q_i \times 10^{-1}$$

$$q_{i+1} = Q[(r_i q_i)/m]$$

$$r_{i+1} = R[(r_i q_i)/m]$$

द्रष्टांत-1

हल करें $\frac{N}{D} \Rightarrow \{Q,R\}$

यदि $D = 10.m - 1$ जैसे (9, 19, 29, ...)

$$Q = \frac{1}{m}\left\{\frac{(0.q_0.q_1\ldots)}{r_0.r_1\ldots.}\right\} \qquad q_0 = \left|\frac{D}{m}\right|$$

$$r_0 = \text{Reminder}\left(\frac{D}{m}\right)$$

$$q_{i+1} = \left|\frac{r_i q_i}{m}\right| \qquad r_{i+1} = \text{Reminder}$$

$$= \text{Rem.}\left(\frac{r_i q_i}{m}\right)$$

द्रष्टांत-2

हल करें $\frac{N}{D} \Rightarrow \{Q,R\}$

यदि $D = 10.m + 1$ जैसे (11, 21, 31, ...)

$$Q=\frac{1}{m}\left\{\frac{(0.q_0.q_1...)}{r_0.r_1....}\right\} \qquad q_0=\left|\frac{D}{m}\right|$$

$$r_0=\text{Rem.}\left(\frac{D}{m}\right) \qquad q_{i+1}=(-1)^i\left|\frac{r_iq_i}{m}\right|$$

$$r_{i+1}=\text{Rem.}\left(\frac{r_iq_i}{m}\right)$$

$$\left\{\frac{+}{-}\right\} \text{चिन्ह} = (-1)^i$$

$$Q=0.q_0\bar{q}_{-1}q_{-2}\bar{q}_{-3}$$

उदाहरण-1

3 को 19 से भाग दें।

$$Q=\frac{3}{19} \qquad b=20 \qquad m=2$$

$$q_1=\frac{D}{20}=\frac{3}{20}=\begin{matrix}q_1=0.1\\ r_i=1\end{matrix}$$

$$r_1=D-b*q_1=3-20*0.1=1$$

$$q_2=Q\left[(r_1q_1)/m\right]=Q\left[(11)/2\right]=5$$

$$r_2=1 \quad q_2=5$$

$$r_3=1 \quad q_3=7$$

$$r_4=1 \quad q_4=8$$

$$r_5=0 \quad q_5=9$$

$$Q=0.1:5:7:8:9:4:7:3:6:8$$

$$(r_1r_2.....)=1:1:1:1:0:1:0:1:1:0$$

$$(q_1q_2...)=0.1:5:7:8:9:4:7:3:6:8$$

$$Q=0.1578947368$$

उदाहरण-2

$$Q=\frac{23}{49}, \qquad m=5 \qquad q_1=\frac{23}{50}=0.4$$

$$r_1=23-50\times.4=3$$

$$Q=0.4:6:9:3:8:7:7:5:5:1$$

$$(r_1r_2.....)=3:4:1:4:3:3:2:2:0:0$$

$$(q_1q_2...)=0.4:6:9:3:8:7:7:5:5:1$$

केस-2

(10 के गुणक +1) से भाग दें b बेस है, $m=\frac{b}{10}$,

यदि $b=10$

$$(10+1)Q=D$$

$$Q=\frac{D}{10}-\frac{Q}{10}$$

$$=\frac{D}{10}-\frac{1}{10}\left(\frac{D}{10}-\frac{Q}{10}\right)$$

$$=\frac{D}{10}-\frac{D}{10^2}+\frac{D}{10^3}-\frac{D}{10^4}+.....$$

यदि $b=m.10$

$$Q=\frac{D}{m\cdot10}-\frac{D}{m^2\cdot10^2}+\frac{D}{m^3\cdot10^3}-\frac{D}{m^4\cdot10^4}+...$$

उदाहरण-1

$$Q=\frac{3}{11}$$

$$=\frac{3}{10^1}-\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}-...$$

$$=0.3\bar{3}3\bar{3}...$$

$$=272727...$$

$$Q=\frac{5}{51}, \qquad m=5, \qquad b=50$$

$$Q=\frac{1}{m}\left[0.5-\frac{0.5}{m}+\frac{0.5}{m^2}-...\right]$$

$$q_1q_2...=0.1:\bar{0}:\bar{2}:\bar{\bar{0}}:4:\bar{\bar{0}}:\bar{8}:\bar{\bar{1}}$$

$$r_1r_2...=0:1:0:\bar{2}:0:4:0:3$$

$$=0.1\overline{02}04\bar{0}81$$

$$=0.09803921$$

गुणन के संदर्भ पैटर्न–

	संख्या	बेस	अंतर
n_1	1009	1000	+009
n_2	13	10	+03

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1009}{13}$ $\quad b_1 = 1000,\ b_2 = 10 \quad m = \frac{b_1}{b_2} = 100 \quad s = \frac{base_2}{b_2}$

इस प्रकार–

$n_1 \quad +d_1 \quad b_1 \quad m = \frac{b_1}{b_2}$

$n_2 \quad +d_1 \quad b_2 \quad s = \frac{base_2}{b_2}$

$$sn_1 : md_2 : d_1d_2$$

$$mn_2 : sd_1 : d_1d_2$$

अथवा उदाहरण–1008 × 96

$n_1 = 1008 \quad +d_1 = 8 \quad b_1 = 1000 \quad m = 10$

$n_2 = 96 \quad +d_2 = -4 \quad b_2 = 100 \quad s = 1$

गुणनफलः $sn_1 : md_2 : d_1d_2$

गुणनफलः $n_1 \times n_2 = mn_2 : sd_1 : d_1d_2$

$$= 960 : 8 : \overline{32} = 968\overline{32} = 96768$$

अथवा $sn_1 : md_2 : d_1d_2$

$$= 1008 : (-40) : \overline{32} = 968\overline{32} = 96768$$

प्रूफ (व्युत्पत्ति)

$n_1 \quad d_1 \quad b_1 \quad s_1$

$xn_2 \quad d_2 \quad b_2 \quad s_2$

मान लें कि $b_1 = b_2 = b$

$$n_1 \times n_2 = (b + d_1) \times (b + d_2)$$
$$= b^2 + b(d_1 + d_2) + d_1d_2$$
$$= b(b + d_1 + d_2) + d_1d_2$$
$$= b(n_1 + d_2) + d_1d_2$$
$$= (n_1 + d_2) : d_1d_2$$

सहयोजित (Concatenated) गुणनफल

$n_1 \quad +d_1 \quad b_1 \quad s_1 \quad n_1 = s_1b_1 + d_1$

$n_1 \quad +d_2 \quad b_2 \quad s_2 \quad n_2 = s_2b_2 + d_2$

$m_1 = b_1/b_2$

$$n_1 \times n_2 = (s_1b_1 + d_1) \times (s_2b_2 + d_2)$$
$$= s_1b_1(s_2b_2 + d_2) + (s_2b_2d_1) + (d_1d_2)$$
$$= s_1b_1n_2 + s_2b_2d_1 + d_1d_2$$
$$= (m_1s_1n_1 + s_2d_1) : d_1d_2$$

{बांयी ओर b_1 के अनुसार शिफ्ट करें और d_1d_2 को उसके आगे रखें}

केस–2

$b_1 = b_2 = 10^k, k = 1, 2, ...d$

$n_1 \times n_2 = (s_1n_2 + s_2d_1) : d_1d_2$

{बांयी ओर k स्थान शिफ्ट करें और d_1d_2 को उसके आगे रखें}

तीन संख्याओं का गुणा

n_1	503	$+3d_1$	$b_1 = b$	$s_1 = s$
n_2	496	$-4d_2$	$b_2 = b$	$s_2 = s$
n_3	497	$-3d_3$	$b_3 = b$	$s_3 = s$

$b = 1000, s = 500, m = s/b = 1/2$

गुणनफल LHS : CP : RHS (समायोजित)

गुणनफल $= n_1 \times n_2 \times n_3$

LHS बांयी संख्या गुणनफल : $m^2b^2(n_1 + d_2 + d_3)$

$$= \frac{1}{4} \times (10^4)(503 - 4 - 3) = \frac{496}{4} \times 10^6$$

CP मध्य संख्या : $mb(d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1)$

$$= \frac{1}{4} \times 10^3 \times (-12 + 12 - 9) = -\frac{9}{2} \times 10^3$$

RHS दांयी संख्या : $d_1d_2d_3$

$= (+3)(-4) \times (-3)$

$= +036$

$$\begin{array}{lccccc} & XXX & & XXX & & XXX \\ \text{गुणनफल} = & LHS & : & CP & : & RHS \\ & 124 & : & \overline{004}\frac{1}{2} & : & 036 \\ = & 123 & : & 996\frac{1}{2} & : & 036 \\ = & 123 & : & 995 & : & 536 \end{array}$$

गुणनफल $(503 \times 496 \times 497) = 123995536$

वर्गफल (Square)

वर्गफल समान संख्याओं का गुणनफल है। इसमें द्वंदयोग का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण

$$\begin{aligned} & 53^2 \\ &= 53 \\ &\times 53 \\ \hline & 5^2 : 2\times(5\times3) : 3^2 \\ & 25 :_3 0 : 9 \\ &= 28 : 0 : 9 \\ &= 2809 \end{aligned}$$

केस–1

$n = a : b$

$n^2 = a^2 + 2ab + b^2$

केस–6

$n = a : b : c$

$n^2 = a^2 : 2ab : (2ac + b^2) : 2bc : c^2$

$$931^2 = (9:3:1)^2$$
$$= 9^2 : 2\times9\times3 : \left((2\times9\times1) + 3^2\right) : 2\times3\times1 : 1^2$$
$$= 81 : 54 : 27 : 6 : 1$$
$$= 81 :\ 4 :\ 7 : 6 : 1$$
$$\quad +5 \ \ +2$$
$$= 866761$$

तिर्यक योग विधि से–

$$\begin{array}{rccccc} d = & d_1 & & d_{32} & & d_3 \\ \times d = & d_1 & & d_{32} & & d_3 \\ \hline & d_1^2 & : & d_2^2 & : & d_3^2 \\ & & 2d_1d_2 & & 2d_2d_3 & \\ & & & 2d_1d_3 & & \\ \hline & d_1^2 & : 2d_1d_2 & : & d^2 + 2d_1d_3 & : 2d_2d_3 : d_3^2 \end{array}$$

घन (Cube)

$$(a+b+c)^3$$
$$= (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc$$

$$d^3 = (d_2\ d_1\ d_0)^3$$

$$\begin{array}{lccccccc} & 10^6 & 10^5 & 10^4 & 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \\ & d_2 & & & d_1 & & & d_0 \\ d^3 = & d_2^3 & 3d_2^2d_1 & 3d_2d_1^2 & d_1^3 & 3d_1^2d_0 & 3d_1d_0^2 & d_0^3 \\ & & & + & + & & + & \\ & & & 3d_2^2d_0 & 6d_2d_1d_0 & & 3d_2d_0^2 & \\ \hline \end{array}$$

$$d_2^3 : 3d_2^2d_1 : \left(3d_2d_1^2 + 3d_2^2d_0\right) : \left(d_1^3 + 6d_2d_1d_0\right) : 3d_1^2d_0 : \left(3d_1d_0^2 + 3d_2d_0^2\right) : d_0^3$$

वर्गमूल (Square Root)

$$d = (d_1 d_0)$$
$$d^2 = d_1^2 + 2d_1d_0 + d_0^2$$

एल्गोरिद्म

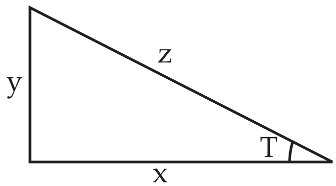
1. RHS दांयी ओर से दो अंको को लें।
2. बाांए अंक का SR वर्गमूल
3. LHS के दो अंको SR का वर्गमूल निकाले
4. RHS के दो अंको के जोड़े को 2(SR) से भाग दे
5. भागफल को SR के दांयी ओर रखे यह नया SR बन गया। यह वर्गमूल है।

उदाहरण

4489 का वर्गमूल निकालें

44	89
$6(2\times7\times6)$	7
SR =	67

त्रिकोणमिति



समकोण त्रिभुज में

$y^2 = z^2 - x^2$

$= (z+x)(z-x)$

कोण

T	:	x	y	z
A	:	x_1	y_1	z_1
B	:	x_2	y_2	z_2
(A+B)	:	$(x_1x_2 - y_1y_2)$	$(x_1y_2 + x_2y_1)$	(z_1z_2)

$$\text{Tan}\,A = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\text{Tan}\,B = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\text{Tan}(A+B) = \frac{\text{Tan}\,A + \text{Tan}\,B}{1 - \text{Tan}\,A\,\text{Tan}\,B}$$

$$\text{Tan}(A+B) = \frac{\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}}{1 - \frac{y_1y_2}{x_1x_2}}$$

$$= \frac{y_1x_2 + y_2x_1}{x_1x_2 - y_1y_2}$$

कोण

	:	x	y	z
A	:	x_1	y_1	z_1
B	:	x_2	y_2	z_2
(A+B)	:	$(x_1x_2 - y_1y_2)$	$(x_1y_2 + x_2y_1)$	(z_1z_2)

60°	1	$\sqrt{3}$	2
45°	1	1	$\sqrt{2}$
$15° = 60° - 45°$	$1+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{2}$
$30° = 45° - 15°$	$2\sqrt{3}$	1	2

$\text{Sin}(A+B)$: Sin A Sin B + Sin A Sin B

$$\frac{y_1}{z_1}, \quad \frac{x_2}{z_2} \quad + \quad \frac{x_1}{z_1} \quad \frac{y_2}{z_2}$$

$$= \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{(z_1z_2)}$$

लाइन (सरल रेखा) का समीकरण

(3, 5) और (2, 3) से पास होने वाली लाइन का समीकरण (equation)

3	5
2	3

$(3-2)y \quad = \quad (5-3)x \quad + \quad (3*3-5*2)$

उर्ध्व अंतर उर्ध्व अंतर तिर्यक अंतर

$y = 2x - 1$

हल करें

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-8} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-9}$$

देखें अधोपदों का योग LHS और RHS दोनों ओर बराबर हैं तो (शून्यम् साम्य समुच्चये) उपसूत्र से

$2x - +5 = 0$

$$x = \frac{5}{2}$$

विमर्श

Vedic Mathematics पर स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज की पुस्तक से वैदिक गणित विमर्श शुरू हुआ और प्रचलन बढ़ा। वैदिक गणित में छात्र पैटर्न देखते हैं, विचारते हैं कि किस सूत्र अथवा उपसूत्र द्वारा प्रश्न को शीघ्रातिशीघ्र हल किया जा सकता है। इससे रचनात्मकता का संवर्धन होता है। जब कोई पैटर्न

पहचान कर हल बता देता है, तो इसे अनुक्रमिक सोच (Inductive Reasoning) कहते हैं। व्युत्पन्न सोच (Deductive Reasoning) में मूल संकल्पनाओं को आधार लेकर संक्रियाएं करके हल करते हैं। गणितीय अनुसंधान प्रायः अनुक्रमिक सोच का परिणाम है (M L Keedy 1965)। इस प्रकार गणितीय सृजनात्मकता का अनुक्रमिक सोच प्रबल आधार है। इससे सूत्र संभव हल की ओर इंगित करते हैं। इसके अतिरिक्त वैदिक गणित सूत्र से गणना बांयी ओर से कर सकते हैं, अथवा दांयी ओर से। उदाहरण के लिए ऊर्ध्व तिर्यक सूत्र में गणना बांयी अथवा दांयी ओर से कर सकते हैं। संगण ना प्रक्रिया अंक स्तर पर है। बीजांक से संख्याओं पर की गई गणना की संभावित सही होने की जाँच कर सकते हैं। वैदिक गणित में संस्कृत में सूत्र, उपसूत्र दिए गए हैं, एल्गोरिद्म नही दिए गए हैं। इस प्रकार पैटर्न आधारी समस्या हल की विधि का प्रादुर्भाव होता है। यह सभी प्रकार की गणनाओं के लिए सरल-सुबोध नहीं है, लेकिन पैटर्न पहचानने के बाद समस्या का हल बहुत आसान होता है। इस तरीके के अभ्यास से विद्यार्थियों में अनुक्रमिक सोच (Inductive Reasoning) का संवर्धन होगा, सृजनात्मकता बढ़ेगी।

भ्रांतियां

वाद-1 वैदिक गणित सूत्र गणित की प्रत्येक शाखा पर लागू होते हैं।

प्रतिवाद-1 वैदिक गणित सूत्रों को पैटर्न मिलने पर लागू करने से संगणना का विकल्प मिलता है। संगण नात्मक जटिलता का मापन करने की आवश्यकता है।

वाद-2 वैदिक गणित से हल की शुद्धता, सही होने को सुनिश्चित करते हैं।

प्रतिवाद-2 हल के बीजांक को संख्याओं के बीजांक के सापेक्ष चैक करते हैं। लेकिन यह बीजांक चैक सदैव एक ही समान हो ऐसा नहीं है।

वाद-3 वैदिक गणित से विद्यार्थियों में तार्किक सोच और सृजनात्मकता में वृद्धि होगी।

प्रतिवाद-3 वैदिक गणित संगणना विधियों का विकल्प देता है। लेकिन इससे तार्किक सोच और सृजनात्मकता में कितनी वृद्धि होती है, यह शोध का विषय है। वैदिक गणित को स्कूल स्तर पर संख्या-खेल की तरह प्रचलित किया जा सकता है।

वाद-4 वैदिक गणित से अनुप्रेरित नयी वैदिक कंप्यूटर संरचना का विकास संभव है।

प्रतिवाद-4 माइक्रो प्रोग्रमिंग की तरह ''पैटर्न आधारी माइक्रोओपरेशन'' की व्यवस्था कंप्यूटर संरचना में संभव है। ऊर्ध्व गुणनफल, तिर्यक गुणनफल योग एवं अंतर विनकुलम, अंकीय आधारित योगफल जैसे-माइक्रोओपरेशन अंकगणितीय एवं तर्क यूनिट (ALU) में जोड़े जा सकते हैं। इसके अतिरिक्त नियमावली भी बनाई जा सकती है जिसके आधार पर पैटर्न मिलान करके माइक्रोओपरेशन किए जा सकते हैं।

अन्त में

इस आलेख में विषय प्रवेश का प्रयास किया गया है, प्रुफ देकर सूत्रानुसार एल्गोरिद्म प्रस्तावित किए गए हैं। अंक स्तर पर ऊर्ध्व, तिर्यक आदि से, गुणा-भाग समीकरण त्रिकोणमिति के कतिपय उदाहरण दिए गए हैं। पैटर्न मिलान और तदनुसार माइक्रोओपरेशन करने के लिए कंप्यूटर संरचना में ALU में व्यवस्था की जा सकती है। यह शोध का भी विषय है। वैदिक गणित में पैटर्न पहचान मिलान और सूत्र/उपसूत्र के अनुसार गणना करने से विद्यार्थियों में गणना-विकल्प खोज, रचनात्मकता और नवाचार प्रवृत्ति का विकास होगा।

संदर्भ

1. Swami Bharti Krishna Tirth, Vedic Mathematics, (BHU 1965), Motilal Banarasi Dass Publishers Pvt. Ltd.
2. M.L. Keedy, Number System: a modern introduction, Addison-Wesley Publication Company (1965)
3. N Puri, Ancient Vedic Mathematics, Pushp- 1, 2 & 3 (SSG, Roorkee, 1986, 1988, 1989)
4. K. Willianms, Discover Vedic Mathematics (Lecture notes, 1990)
5. Om Vikas, et.al. "An Alternate Design for Paralled Multiplier", IETE Journal, August 2005.